Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

MATHEMATICS

ON THE EXPANSION OF ANY FUNCTION INTO A SERIES OF SCHLÖMILCH

By J. A. MINDLIN

(Communicated by I. M. Vinogradow, Member of the Academy, 11. XII. 1935)

In the present paper we give another generalization [1] of Schlömilch's wellknown expansion of any function into a series of Bessel's functions of the zero order.

Let the function $f(x)$ have a continuous derivative with a bounded complete variation in the closed interval 0, π) and satisfy the condition

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = A,$$

where A is a finite value and n any positive number. Then it is possible to expand the function $f(x)$ into a series of the form:

$$f(x) = \frac{a_1^{(n+\nu)} I_{n+\nu}(x)}{\left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu}} + \frac{a_2^{(n+\nu)} I_{n+\nu}(2x)}{\left(\frac{1}{2}2x\right)^{\nu}} + \frac{a_3^{n+\nu} I_{n+\nu}(3x)}{\left(\frac{1}{2}3x\right)^{\nu}} + \ldots, \quad -\tfrac{1}{2} < \nu < \tfrac{1}{2} \qquad (1)$$

which holds true in this interval.

The coefficients $a_k^{(n+\nu)}$ are determined by the following formulae:

$$a_k^{(n+\nu)} = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(k\mu + \frac{\pi}{2} n\right) \Phi_n(\mu)\, d\mu, \qquad (2)$$

where

$$\Phi_n(\mu) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \int_0^{\mu} \frac{[\rho^{n2+\nu} f(\rho)]'}{\rho^{2\,n-1}} \left\{ \frac{\mu^{n-1}}{(\mu^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}+\nu}} - \right.$$

$$\left. - (\mu^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}-\nu} \sum_{l=0}^{l=\left[\frac{n-3}{2}\right]} b_l \mu^{n-3-2l} \rho^{2l} + \right.$$

$$+\frac{\Gamma(n+2\nu)\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\nu+2)}\,\rho^{n-2}\,C_{n-2}^{\left(\nu+\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\rho^{2\nu}}-\frac{1}{\mu^{2\nu}}\,F\left(\frac{1}{2}+\nu,\ \nu,\ \nu+1,\ \frac{\rho^2}{\mu^2}\right)\right]\Bigg\}\,d\rho, \tag{3}$$

$$b_l=2^{n-2}\sum_{m=2l}^{m=n-3}\frac{(-1)^m\,\Gamma\left(\frac{n-1-m}{2}+l\right)\Gamma\left(\frac{n-2-m-2\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1-m}{2}\right)\Gamma(m+1-2l)\,\Gamma(n-1-m+2l)\,\Gamma\left(\frac{2l+2-n-m-2\nu}{2}\right)}.$$

For $n=1$ and 2 the sum on the right-hand side of (3) vanishes.

Here by $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ is denoted a hypergeometric function and by $C_n^{(\alpha,\ \beta)}(z)$, a polynomial of Jacobi-Gegenbauer:

$$C_n^{(\alpha,\ \beta)}(z)=\frac{1}{\Gamma(n+1)\,2^n\,(1-z)^\alpha\,(1+z)^\beta}\,\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\,(1-z)^\alpha\,(1+z)^\beta\right],$$

where

$$C_{-1}^{(\alpha,\ \beta)}(z)=0.$$

Let us consider the integral equation,

$$f(x)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi\varphi(x\cos\xi)\sin^{2\nu}\xi\,C_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\ \nu-\frac{1}{2}\right)}(\cos\xi)\,d\xi \tag{4}$$

$\left(-\frac{1}{2}<\nu<\frac{1}{2};\ f(x)\right.$ is the given function of the above-mentioned properties and $\varphi(\mu)$ is the required function$\left.\right)$. We can prove that the solution of the integral equation (4) is of the following form:

$$\varphi(\mu)=\Phi_n(\mu)+R(\mu)+Q_{n-1}(\mu), \tag{5}$$

where $\Phi_n(\mu)$ is determined by formula (3),

$$\Phi_n(-\mu)\text{ being equal to }(-1)^n\,\Phi_n(\mu), \tag{6}$$

$R(\mu)$ being any function with the property

$$R(-\mu)=(-1)^{n-1}\,R(\mu), \tag{7}$$

and $Q_{n-1}(\mu)$ being any polynomial of the power $(n-1)$ with regard to μ.

Expanding $\Phi_n(\mu)$ into a series of Fourier, we get

$$f(x)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi\sin^{2\nu}\xi\,C_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\ \nu-\frac{1}{2}\right)}(\cos\xi)\,d\xi\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Phi_n(\mu)\,d\mu+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\pi\cos\left(k\mu+\frac{\pi}{2}\,n\right)\Phi_n(\mu)\cos\left(kx\cos\xi+\frac{\pi}{2}\,n\right)d\mu\right\}=$$

$$=\left(-1\right)^n\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\pi\cos\left(k\mu+\frac{\pi}{2}\,n\right)\Phi_n(\mu)\,\frac{I_{n+\nu}(kx)}{\left(\frac{1}{2}\,kx\right)^\nu}\,d\mu. \tag{8}$$

On account of the absolute convergence of the integral $\int_0^{\pi} \sin^{2\nu}\xi\, d\xi$ and the uniform convergence of Fourier's series for the function $\Phi_n(\mu)$, we are allowed to change summation and integration.

For $\nu = \frac{1}{2}$ the coefficients $a_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ are of the form:

$$a_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \cos\left(k\mu + \frac{\pi}{2} n\right) B_n(\mu)\, d\mu, \tag{9}$$

where

$$B_n(\mu) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\mu^{n+1} f(\mu)\right]'}{2\mu^n} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \int_0^{\mu} \frac{P'_{n-1}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\left[\rho^{n+1} f(\rho)\right]'}{\rho^{n+1}}\, d\rho. \tag{10}$$

Here by $P_n(z)$ is denoted a polynomial of Legendre, where $P'_{-1}(\mu) = 0$. Then the expansion (1) holds true also for $n = 0$, but then it is necessary to add on the right-hand side a term of the form

$$a_0^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) f(\pi)}{2}.$$

For $\nu = \frac{1}{2}$ the integral equation (4) will be of the form

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \varphi(x\cos\xi)\, P_n(\cos\xi) \sin\xi\, d\xi. \tag{11}$$

We can prove that the solution of the integral equation (11) has the form

$$\varphi(\mu) = B_n(\mu) + R(\mu) + Q_{n-1}(\mu), \tag{12}$$

where $B_n(\mu)$ is determined by formula (10),

$$B_n(-\mu) \text{ being equal to } (-1)^n B_n(\mu), \tag{13}$$

$R(\mu)$ being any function with the property (7) and $Q_{n-1}(\mu)$ being any polynomial of the power $(n-1)$ with regard to μ.

In order to get the expansion (1) for $\nu = \frac{1}{2}$, the theorem of Fourier must be applied to the function $B_n(\mu)$, as we did before.

It should be mentioned that the expansion (1) is not the only possible one, the integral equations (4) and (11) admitting of an infinite number of solutions.

Academy of Sciences of USSR,
Mathematical Institute
Moscow

Received
11. XII. 1935.

REFERENCES

[1] C. R. Acad. Sci. URSS, vol. II, № 9 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

MATHEMATIK

OFFENE ABBILDUNGEN UND STETIGE ZERLEGUNGEN [1]

Von A. POLAK

(Vorgelegt von S. N. Bernstein, Mitglied der Akademie, d. 17. XI. 1935)

Unter einer *offenen Abbildung* eines topologischen Raumes X in einen topologischen Raum Y verstehen wir eine stetige Abbildung f von X in Y, welche jede offene Menge von X auf eine offene Menge von Y abbildet [2].

Wir beschränken uns in dieser Note auf den Fall von Abbildungen eines Kompaktums X auf ein Kompaktum Y.

Bekanntlich entspricht jeder stetigen Abbildung f von X auf Y eine stetige[3] Zerlegung (f) von X in lauter disjunkte abgeschlossene Mengen X—die Urbilder der einzelenen Punkte von Y bei der Abbildung f. Diese Zerlegung heisst *vollstetig*, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: *Ist* $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ *eine konvergente Punktfolge in* X *mit* $\lim x_k = x_\omega$, *so ist die Folge* der Zerlegungselemente $X_k \supset x_k$ ebenfalls konvergent, und zwar ist $\lt X_k = X_\omega$ wobei das Zerlegungselement X_ω durch $X_\omega \supset x_\omega$ definiert ist.

Es gilt nun folgender Satz:

I. *Die stetige Abbildung f des Kompaktums X auf das Kompaktum Y ist dann und nur dann offen, wenn die zugehörige stetige Zerlegung vollstetig ist.* [4]

Hieraus folgt:

Liegt eine offene Abbildung f von X auf Y vor, und ist (f) die zugehörige Zerlegung, $X = \Sigma\, f^{-1}(y)$, $y \subset Y$, so ist $\lim y_k = y_\omega$ mit $\lt X_k = X_\omega$ gleichbedeutend. Da aber in Kompakten die topologische Konvergenz mit der metrischen übereinstimmt,[5] und die metrische Konvergenz die topologi-

---

[1] Diese Arbeit ist unter der Leitung von Professor P. Alexandroff geschrieben. Insbesondere rühren von Prof Alexandroff wesentliche Vereinfachungen meiner ursprünglichen Beweise sowie die endgültige Redaktion dieser Note her.

[2] Wir folgen hier der Terminologie von Herrn Alexandroff. Andere Autoren (z. B. Hausdorff) gebrauchen die Benennung «innere» Abbildung.

[3] Vgl. P. Alexandroff, «Über stetige Abbildungen kompakter Räume», Math. Ann. 96, 1926, 555—sowie Alexandroff-Hopf, Topologie I, Berlin, Springer, 1935, Kap. II, § 8S.).

[4] Nachdem diese Arbeit fertig war, erfuhr ich, dass dieser Satz in der Arbeit von Herrn S. Eilenberg «Sur les transformations d'espaces métriques en circonférence», Fund. Math., 24, 1935, 160—176, und zwar als Lemma auf S. 174, bewiesen wurde. Da mein Beweis sich nur unwesentlich vom Beweis des Herrn Eilenberg unterscheidet, verzichte ich hier auf seine Wiedergabe.

[5] Vgl. Hausdorff, Mengenlehre (Berlin, 1927), oder Alexandroff-Hopf.

sche Zuordnung im Raume $F(X)$ der abgeschlossenen Punktmengen von X bestimmt,[1] gilt der Satz:

II. *Bei jeder offenen Abbildung f von X auf Y und nur bei einer offenen Abbildung ist die Menge der Elemente der zu f gehörenden stetigen Zerlegung (f) eine abgeschlossene Punktmenge Y' des Raumes $F(X)$; diese Punktmenge ist mit Y homöomorph und zwar erhält man eine topologische Abbildung von Y auf Y', wenn man jedem Punkt $y \subset Y$ sein Urbild $f^{-1}(y)$ zuordnet—als Punkt von $Y' \subset F(X)$ betrachtet.*

Auf Grund dieses Satzes können wir im Falle einer offenen Abbildung f den Bildraum $Y=f(X)$ stets als abgeschlossene Punktmenge des Raumes $F(X)$ auffassen. Von dieser Bemerkung werden wir von jetzt an stets stillschweigend Gebrauch machen.

1. Ordnet man jedem Punkt von $F(X)$ den Durchmesser der betreffenden Menge $F \subset X$ zu, so entsteht eine Abbildung d von $F(X)$ in die Zahlengerade, und diese Abbildung ist, wie leicht ersichtlich, stetig. Stetig ist auch die Abbildung $D=d(f)$ von X in die Zahlengerade (es ist ja, laut der soeben gemachten Verabredung, $Y=f(X) \subset F(X)$, folglich ist $d(f)$ in jedem Punkt von X definiert und—als Superposition zweier stetiger Abbildungen—stetig). $D(X)$ ist somit eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge der Zahlengerade, d. h. die Menge der Zahlen, die als Durchmesser der Elemente der zu der offenen Abbildung f gehörenden vollstetigen Zerlegung auftreten. Der Abbildung D entspricht eine stetige Zerlegung (D) von X: man erhält ihre Elemente, wenn man jeweils die Vereinigungsmenge aller Elemente von (f), die denselben Durchmesser haben, betrachtet. Ebenso entspricht der Abbildung d eine stetige Zerlegung (d) von Y: die Elemente von (d) erhält man, wenn man die Vereinigungsmenge aller Punkte y von Y bildet, denen Urbilder $f^{-1}(y)$ von gleichem Durchmesser entsprechen. Wir werden übrigens die Abbildung d nur in den zu Y gehörenden Punkten von $F(X)$, also als eine Abbildung von Y in die Zahlengerade, betrachten.

2. Die soeben geschilderte Sachlage zieht eine Reihe von Konsequenzen nach sich. Und zwar:

III. *Es sei f eine offene Abbildung des Kompaktums X auf das Kompaktum Y, bei der keine zwei Urbilder den gleichen Durchmesser haben. Dann ist Y höchstens eindimensional und sogar einer Punktmenge der Zahlengerade homöomorph.*

Denn in diesem Falle ist die auf $Y \subset F(X)$ erklärte stetige Abbildung d in die Zahlengerade eineindeutig, also, da Y kompakt ist, topologisch.

Ist, unter den Voraussetzungen des Satzes III, X zusammenhängend (also ein Kontinuum), so ist offenbar Y ein einfacher Jordanbogen.

K o r o l l a r. Die Menge der Zahlen, die als Durchmesser der Elemente einer vollstetigen Zerlegung eines Kontinuums auftreten, besteht entweder aus einem Element, oder sie ist ein abgeschlossenes Intervall der Zahlengerade.

IV. *Das Kompaktum X sei auf das n-dimensionale Kompaktum Y offen abgebildet, dann gibt es in Y eine mindestens $(n-1)$-dimensionale Menge von Punkten, deren Urbilder in X alle denselben Durchmesser haben.*

B e w e i s. Die offene Abbildung f bildet X in Y, die stetige Abbildung d bildet Y auf die höchstens eindimensionale Menge $d(Y)$ ab; nach einem bekannten Satz von Hurewicz gibt es bei der Abbildung d Punkte [von $d(Y)$] mit einem mindestens $(n-1)$-dimensionalen Urbild; d. h. bei der stetigen

[1] Sieh Fussnote [5] atf der vorhergehenden Seite.

Zerlegung (d) von Y treten notwendig mindestens (n—1)-dimensionale Elemente auf. Hieraus und aus dem Schluss von 2. die Behauptung:

V. *Es sei f eine offene Abbildung des Kontinuums X auf das Kontinuum Y; wir nehmen an, dass nicht alle Urbilder $f^{-1}(y)$ denselben Durchmesser haben, so dass die Menge $D(X)$ ein abgeschlossenes Intervall $[a; b]$ der Zahlengerade ist. Ist c eine beliebige Zahl zwischen a und b, $a<c<b$, so zerlegt die abgeschlossene Punktmenge $D^{-1}(c)$ das Kontinuum X.*

Diese Behauptung folgt in der Tat aus dem bekannten Lehrsatz: Ist f eine stetige Abbildung der zusammenhängenden Menge X auf die zusammenhängende Menge Y, und wird Y durch $B \subset Y$ zerlegt, so zerlegt $f^{-1}(B)$ die Menge X.

Institut f. Mathematik
an der Universität Moskau

Eingegangen
d. 17. XI. 1935.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

MATHÉMATIQUES

SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES GÉNÉRAUX

Par Z. SURIKOVA

(*Présenté par N. N. Lusin, de l'Académie, le 26. X. 1935*)

1. Considérons une équation différentielle d'ordre n

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

$p_i(x)$ et $f(x)$ étant des fonctions continues dans l'intervalle (a, b). Cherchons la solution de l'équation (1) qui satisfait à des conditions linéaires les plus générales, dépendant des valeurs de la fonction et de ses dérivées dans l'intervalle (a, b). Ces conditions sont des fonctionnelles linéaires de $y, y_1', \ldots y^{(n-1)}$. M. Riesz a démontré qu'une fonctionnelle linéaire continue peut être exprimée par une intégrale de Stieltjes. Donc, nous considérons les conditions linéaires de la forme:

$$U_i[y] \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \int_a^b \frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}}\, d\alpha_{i\nu}(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \qquad (2)$$

Les conditions bilocales, polylocales et intégrales sont des cas particuliers des conditions (2).

De telles conditions ont été considérées par divers auteurs, p. ex. Smohorshewski (1), Tamarkin (2), les conditions de la forme (2) ont été étudiées par N. Cioranescu (3) pour les équations différentielles du 2nd et 3ème ordre, ainsi que pour une équation particulière d'ordre n.

2. Considérons le système (1)—(2).

Soit $y_1, y_2, \ldots y_n$ un système fondamental de solutions de l'équation $L[y] = 0$ et $y_0(x)$ une solution particulière de l'équation (1), qui peut être écrite sous la forme

$$y_0(x) = \int_a^x f(s)\, g(x, s)\, ds,$$

où

$$g(x, s) = \frac{1}{\delta(s)} \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1^{(n-1)}(s) & \ldots & y_n^{(n-1)}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1(s) & \ldots & y_n(s) \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

et $\delta(s)$ est le Wronskien.

La solution la plus générale de l'équation (1) est alors:

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x), \tag{4}$$

c_k étant n constantes arbitraires qu'on détermine à l'aide des conditions (2). On obtient ainsi un système de n équations linéaires en c_k à savoir le système:

$$\sum_{\nu=1}^{n} U_{ik} c_k + \int_a^b f(s) U_i''(g)\, ds = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

où

$$U_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} \int_a^b \frac{d^{\nu-1} y_k(x)}{dx^{\nu-1}}\, d\alpha_{i\nu}(x); \quad U_i''(g) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_s^b \frac{d^{\nu-1} g(x, s)}{dx^{\nu-1}}\, d\alpha_{i\nu}(x).$$

Désignons par D le déterminant du système (5):

$$D = |U_{ik}|.$$

Considérons trois cas:

I. $D \neq 0$. La solution du système (1)—(2) a la forme suivante:

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds,$$

où

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{D} \begin{vmatrix} y_1(x) \ldots y_n(x), & g(x, s) \\ U_{11} \ldots U_{1n} & U_1''(g) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ U_{n1} \ldots U_{nn} & U_n''(g) \end{vmatrix} - g(x, s) & x \leqslant s \\ \dfrac{(-1)^n}{D} \begin{vmatrix} y_1(x) \ldots y_n(x)\, g(x, s) \\ U_{11} \ldots U_{1n} \quad U_1''(g) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{n1} \ldots U_{nn} \quad U_n''(g) \end{vmatrix} & x \geqslant s \end{cases} \tag{6}$$

Nous appellerons la fonction $G(x, s)$ fonction de Green correspondant aux conditions linéaires les plus générales (2). La fonction de Green satisfait les conditions suivantes:

1°. $G(x, s)$ et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $(n—2)$ sont continues, si s est fixée et ne coïncide pas avec les points de discontinuité des fonctions $\alpha_{i\nu}$.

2°. Si s a une valeur fixe, la fonction $G(x, s)$ a la $(n—1)$-me dérivée continue pour toutes les valeurs de $x \neq s$. Pour $x = s$ cette dérivée n'existe pas et a le saut égal á l'unité.

3°. $L_x[G(x, s)] = 0$.

4°. $U_i[G(x, s)] = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$.

Pour les valeurs s qui correspondent aux points de discontinuité des fonctions $\alpha_{i\nu}(x)$, la fonction $G(x, s)$ n'est pas déterminée (parce que la

fonction U_i'' n'est pas déterminée), mais elle possède en ces points les valeurs limites déterminées à droite et à gauche. Le système:

$$L[y] + \lambda y = f(x),$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_a^b \frac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}}\, d\alpha_{i\nu}(x) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad \text{(A)}$$

se réduit à l'équation intégrale de Fredholm

$$y(x) = -\lambda \int_a^b G(x, t)\, y(t)\, dt + \int_a^b G(x, t) f(t)\, dt.$$

II. $D = 0$, mais le mineur d' ordre p est différent de zéro. Dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que le système (1)—(2) ait une solution, est:

$$\int_a^b f(s)\, K_r(s)\, ds = 0 \qquad (r = p+1, \ldots n), \qquad (7)$$

où

$$K_r(s) = \sum_{\nu=1}^{p} h_\nu^{(r)} U_\nu''(g) - U_r''(g), \qquad (8)$$

et $h_\nu^{(r)}$ sont des constantes définies.

Cette solution dépend de $n-p$ constantes arbitraires c_m, et a la forme suivante:

$$y(x) = \sum_{m=p+1}^{n} c_m \tilde{y}_m(x) + \int_a^b f(s)\, \tilde{G}(x, s)\, ds, \qquad (9)$$

où

$$\tilde{G}(x, s) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^p}{D_p} \begin{vmatrix} y_1(x), \ldots y_p(x)\, g(x, s) \\ U_{11} \ldots U_{1p} \quad U_1''(g) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{p1} \ldots U_{pp} \quad U_p''(g) \end{vmatrix} - g(x, s) & x \leqslant s, \\ \dfrac{(-1)^p}{D_p} \begin{vmatrix} y_1(x) \ldots y_p(x)\, g(x, s) \\ U_{11} \ldots U_{1p} \quad U_1''(g) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{p1} \ldots U_{pp} \quad U_p''(g) \end{vmatrix} & x \geqslant s, \end{cases} \qquad (10)$$

$$\tilde{y}_m(x) = \sum_{k=1}^{p} h_{km} y_k(x) + y_m(x) \qquad h_{km} = \text{const}$$

L'expression (10) montre que $\tilde{G}(x, s)$ satisfaisant aux conditions 1°—3°, les conditions 4° ne sont remplies que partiellement, notamment les conditions $U_i[y] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots p)$.

Le système (A) se réduit à l'équation intégrale de Fredholm:

$$y(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b \tilde{G}_1(x, s)\, y(s)\, ds,$$

où

$$\tilde{G}_1(x, s) = \tilde{G}(x, s) - \sum_{r=p+1}^{n} N_r(x) \int_a^b K_r(t)\, \tilde{G}(t, s)\, dt$$

et

$$\varphi(x) = \int_a^b \tilde{G}_1(x, s)\, f(s)\, ds + \frac{1}{\lambda} \sum_{r=p+1}^{n} N_r(x) \int_a^b f(t)\, K_r(t)\, dt,$$

$\tilde{G}(x, s)$ et $K_r(t)$ étant définis par les formules (10) et (8) respectivement: $N_r(x)$ sont des combinaisons linéaires bien déterminées des fonctions $\tilde{y}_i(x)$.

III. $D = 0, \quad U_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$

Pour que le système (1)—(2) ait une solution, $f(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes, nécessaires et suffisantes:

$$\int_a^b U_i''[g(x, s)]\, f(s)\, ds \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{11}$$

Cette solution dépend de n constantes arbitraires c_k, et a la forme suivante:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + \int_a^x f(s)\, g(x, s)\, ds. \tag{12}$$

Le système (A) se réduit à l'équation intégrale de Fredholm

$$y(x) = -\lambda \int_a^b \Gamma(x, t)\, y(t)\, dt + \int_a^b \Gamma(x, t) f(t)\, dt + \frac{1}{\lambda\Delta} \sum_{k=1}^{n} Q_k y_k(x),$$

où

$$\Gamma(x, t) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{\Delta} \begin{vmatrix} y_1(x) \ldots y_n(x)\, g(x, t) \\ p_{11} \ldots p_{1n} \displaystyle\int_t^b U_1''(g)\, g(s, t)\, ds \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n1} \ldots p_{nn} \displaystyle\int_t^b U_n''(g)\, g(s, t)\, ds \end{vmatrix} - g(x, t) & x \leqslant t \\ \dfrac{(-1)^n}{\Delta} \begin{vmatrix} y_1(x) \ldots y_n(x)\, g(x, t) \\ p_{11} \ldots p_{1n} \displaystyle\int_t^b U_1''(g)\, g(s, t)\, ds \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n1} \ldots p_{nn} \displaystyle\int_t^b U_n''(g)\, g(s, t)\, ds \end{vmatrix} & x \geqslant t, \end{cases}$$

$$\Delta = |p_{ik}|, \quad p_{ik} = \int_a^b U_i''[g(x, s)]\, y_k^{*}(s)\, ds \quad \text{et} \quad Q_k = \text{Const.}$$

3. Construction de la fonction de Green suivant Hilbert. Si on construit la fonction de Green se basant sa définition à

priori, on obtient le même resultat, qui est donné par la formule (6). Si nous construisons suivant Hilbert la fonction de Green généralisée, en supposant $D = 0$, nous obtenons une méthode nouvelle pour réduire le système linéaire (1)—(2) à une équation intégrale.

Supposons que $D = 0$, mais le mineur d'ordre p est différent de zéro. Si $D = 0$, la solution du système (1)—(2) n'existe pas, mais il existe une solution du système homogène $L[y] = 0$, $U_i[y] = 0$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, que l'on peut écrire sous la forme:

$$y_0(x) = \sum_{m=p+1}^{n} t_m \tilde{y}_m(x),$$

t_m étant des constantes arbitraires.

Nous désignerons comme fonction de Green généralisée, suivant Hilbert, une fonction $\tilde{G}(x, s)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. $\tilde{G}(x, s)$ et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $(n-2)$ sont continues.

2°. La dérivée d'ordre $(n-1)$ de la fonction $\tilde{G}$ a au point $x = s$ le saut égal à l'unité.

3°. $$L_x[\tilde{G}(x,s)] = \sum_{m=p+1}^{n} \tilde{y}_m(x) \tilde{\tilde{y}}_m(s), \qquad (13)$$

où $\tilde{\tilde{y}}_m(x)$ sont des fonctions que nous définirons ensuite.

4°. $U_i[\tilde{G}(x, s)] = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$

Cherchons la fonction de Green sous la forme suivante:

$$\tilde{G}(x, s) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k y_k(x) + \varphi_0(x, s) & x \leqslant s \\ \sum_{k=1}^{n} b_k y_k(x) + \varphi_0(x, s) & x \geqslant s, \end{cases}$$

où

$$\varphi_0(x, s) = \sum_{m=p+1}^{n} \tilde{\tilde{y}}_m(s) \int_a^x g(x, t) \tilde{y}_m(t)\, dt$$

est une solution particulière de l'équation (13).

Les coefficients a_k et b_k sont choisis d'une telle manière que les conditions 1°—4° sont remplies.

Alors la fonction $\tilde{G}(x, s)$ prend la forme suivante:

$x \leqslant s$

$$\tilde{G}(x, s) = \frac{(-1)^p}{D_p} \begin{vmatrix} y_1(x) \ldots y_p(x) & g(x, s) \\ U_{11} \ldots U_{1p} & U_1''(g) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ U_{p1} \ldots U_{pp} & U_p''(g) \end{vmatrix} - g(x, s) + \sum_{m=p+1}^{n} a_m \tilde{y}_m(x) +$$

$$+\sum_{m=p+1}^{n}\tilde{\tilde{y}}_m(s)\int_a^b \tilde{y}_m(t)\frac{(-1)^p}{D_p}\begin{vmatrix} y_1(x)\ldots y_p(x)\,g(x,t)\\ U_{11}\ldots U_{1p}\;\; U_1'(g)\\ \ldots\ldots\ldots\\ U_{p1}\ldots U_{pp}\;\; U_p'(g)\end{vmatrix}dt -$$

$$-\sum_{m=p+1}^{n}\tilde{\tilde{y}}_m(s)\int_x^b g(x,t)\,\tilde{y}_m(t)\,dt$$

$x \geqslant s$

$$\tilde{G}(x,s)=\frac{(-1)^p}{D_p}\begin{vmatrix} y_1(x)\ldots y_p(x)\,g(x,s)\\ U_{11}\ldots U_{1p}\;\; U_1''(g)\\ \ldots\ldots\ldots\\ U_{p1}\ldots U_{pp}\;\; U_p''(g)\end{vmatrix}+\sum_{m=p+1}^{n}a_m\tilde{y}_m(x)+$$

$$+\sum_{m=p+1}^{n}\tilde{\tilde{y}}_m(s)\int_a^b \tilde{y}_m(t)\frac{(-1)^p}{D_p}\begin{vmatrix} y_1(x)\ldots y_p(x)\,g(x,t)\\ U_{11}\ldots U_{1p}\;\; U_1''(g)\\ \ldots\ldots\ldots\\ Up_1\ldots U_{pp}\;\; U_p''(g)\end{vmatrix}dt -$$

$$-\sum_{m=p+1}^{n}\tilde{\tilde{y}}_m(s)\int_x^b g(x,t)\,\tilde{y}_m(t)\,dt.$$

La solution du système (1)—(2) à l'aide de cette fonction s'exprime comme il suit:

$$y(x)=\sum_{m=p+1}^{n}t_m\tilde{y}_m(x)+\int_a^b \tilde{G}(x,s)\,f(s)\,ds. \qquad (14)$$

Pour que la solution d'équation (1) ait la forme (14) il est nécessaire et il suffit que $f(x)$ satisfasse aux égalités:

$$\int_a^b \tilde{\tilde{y}}_m(s)\,f(s)\,ds=0 \qquad (m=p+1,\ldots n).$$

Remarquons que la fonction de Green généralisée dépend des fonctions $\tilde{\tilde{y}}_m(s)$, qui au cas des conditions bilocales sont des solutions du système conjugué.

M. Tamarkin a démontré que, si les conditions linéaires ont la forme (2), les conditions linéaires conjuguées n'existent pas, d'où il suit que nous ne pouvons pas déterminer $\tilde{\tilde{y}}_m(s)$ comme une solution du système conjuguée. Mais comme dans notre cas $D=0$ et $D_p\neq 0$, nous définissons les $\tilde{\tilde{y}}_m(s)$ par la condition que le rang de la matrice n'augmente pas, en adjoignant la $(n+1)$-me colonne contenant les seconds membres d'un système d'équations.

Manuscrit reçu le 27 X 1935.

LITTÉRATURE CITÉE.

[1] J. Tamarkin, Sur quelques problèmes générales des équations différentielles, Thèse russe (1917). [2] A. Smohorshewsky, Cycle Math. Ac. Sci. Ukraine. № 3—4 (1935). [3] N. Cioranescu, Math. ZS. 35 (1932).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

TEORETISCHE MECHANIK

ÜBER DEN UNWESENTLICHEN CHARAKTER EINER DER BESCHRÄNKUNGEN, WELCHE DEN TOPOGRAPHISCHEN SYSTEMEN IN DER LIAPUNOFFSCHEN STABILITÄTSTHEORIE AUFERLEGT WERDEN

Von N. MOISSEJEV

(Vorgelegt von N. Lusin, Mitglied der Akademie, d. 21. XII. 1935)

Beim Lösen der Frage von der Stabilität im Liapunoff'schen Sinne der trivialen Lösung

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \tag{1}$$

des Gleichungssystems

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \qquad (s = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

wo

$$X_s(0, 0, \ldots 0, t) \equiv 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots n)$$

gleichwie beim Lösen einer allgemeineren Frage betreffend die Eigenschaften der Lösungen des Systems (2), die der Lösung (1) benachbart sind, benutzt man bekanntlich mit Vorteil das Verfahren einer Untersuchung des Gegenseitigkeitsverhältnisses zwischen den Trajektorien des Systems (2) und den Flächen einer gewissen einparametrigen Flächenschar:

$$V(x_1, x_2, \ldots x_n, t) = C, \tag{3}$$

wo C den Scharparameter darstellt.

Beim Anwenden dieses, zuweilen als «zweite Methode von Liapunoff» bezeichneten Verfahrens, hat A. Liapunoff als Charakteristik des besagten Verhältnisses die Ableitung

$$\frac{dV}{dt} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{4}$$

gewählt.

Wie von A. Liapunoff nachgewiesen, lässt sich in mehreren Fällen die logische Äquivalenz zweier Tatbestände feststellen, nämlich von Zugehörigkeit der Funktion V und ihrer Ableitung (4) gewisser bestimmten Eigenschaften und von Stabilität oder Instabilität im Liapunoff'schen Sinne der trivialen Lösung (1).

Demgemäss hängt die Effektivität der «zweiten Methode» vom Umfang der Klasse von V-Funktionen ab, für welche die obenerwähnte Äquivalenz nachweisbar ist.

So gelangen wir denn zur Schlussfolgerung, dass die Frage nach der Wesentlichkeit der Beschränkungen, welche Liapunoff und seine Fortsetzer der Klasse der zulässigen V-Funktionen auferlegt haben, durchaus aktuell und von grosser praktischer Bedeutung ist.

In vorliegender Notiz lassen wir die berührte Frage in ihrer ganz allgemeinen Fassung beiseite und erlauben uns blos auf den unwesentlichen Charakter einer der genannten Beschränkungen hinzuweisen, nämlich derjenigen, die in der Forderung von Stetigkeit für die Ableitung $\frac{dV}{dt}$ besteht.

Tatsächlich ist, dem Sinne der Äusserungen von Liapunoff [1] nach, die Stetigkeit der Ableitung (4) in seiner Abhandlung durchweg vorauszusetzen. Doch ergibt eine sorgfältige Betrachtung derjenigen Stellen der betreffenden Abhandlung [1], wo diese Stetigkeit verwertet werden kann, dass diese Forderung lediglich dem Zwecke dient, die Existenz des Integrals:

$$V - V_0 = \int_{t=t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \qquad (5)$$

zu gewährleisten.

Ganz analoge Bemerkungen gelten auch für alle uns bekannten Sätze der zweiten Methode, welche nach Liapunoff bewiesen wurden [2–4].

Als einzige Ausnahme können wir die interessante Arbeit von Prof. Malkin (Kasan)[5] anführen, in welcher der Verfasser bei seiner Untersuchung der Möglichkeit einer Umkehrung des Liapunoff'schen Satzes über die Stabilität für den Fall von zwei Freiheitsgraden nicht nur die stetigen V-Funktionen mit stetigen oder unstetigen Ableitungen, sondern auch unstetige V-Funktionen gebraucht hat.

Auf Grund des Gesagten kommen wir zum nachfolgenden Schluss:

Alle Sätze der zweiten Methode von Liapunoff behalten ihre Gültigkeit, wenn wir, caeteris paribus, zulassen, dass die Ableitung (4) endliche Sprünge ohne Zeichenwechsel in denjenigen Punkten haben kann, deren Mass auf der Punktmenge, auf welcher die Funktion V definiert ist, gleich Null ist.

Vom geometrischen Standpunkt aus heisst das, dass wir, anstatt der in der Liapunoff'schen Theorie einzig zulässigen topographischen Systeme von stetigen Flächen mit stetiger Normale, nunmehr Systeme von nur stückweise glatten stetigen Flächen in Anwendung bringen dürfen.

Diese Tatsache scheint uns eine erhebliche Erweiterung des Umfangs der Klasse von Aufgaben zu gestatten, die eine leichte Lösung im Rahmen der zweiten Methode zulassen.

In einem unserer nachfolgenden Aufsätze werden wir diesbezügliche Beispiele anführen.

Astronomisches Institut.
Moskau.

Eingegangen
d. 21. XII. 1935

ZITIERTE LITERATUR

1. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1892. 2. Г. Н. Дубошин, C. R. Acad. Sci. URSS, 1, 5 (1935). 3 G. Doubochine, Bull. de l'Acad. Sci. URSS, № 4 (1935). 4 Н. Г. Четаев, C. R. Acad. Sci. URSS, № 9 (1934). 5 И. Г. Малкин, О возможности обращения теоремы Ляпунова об устойчивости.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

PHYSIK

EIN NEUES LICHTAUFNAHMEVERFAHREN

PHOTO-ELEKTROCHEMISCHE PROZESSE

Von K. M. KOSONOGOVA

(Vorgelegt von A. G. Goldman, Mitglied der Ukrainischen Akademie, d. 17. I. 1936)

Im Jahre 1932 habe ich gemeinsam mit F. Gluchowskaja ein neues photochemisches Effekt festgestellt, das zum Zweck der photographischen Bilderzeugung verwendet werden kann, nämlich eine Lichtwirkung, welche nur beim Vorhandensein einer bestimmten elektrochemischen Polarisation der zu untersuchenden nicht merklich lichtempfindlichen Substanz zustande kommt. Die von uns beschriebene Erscheinung war die folgende: eine mit Kupferoxydul bedeckte Kupfer-Elektrode, welche in eine Salzlösung getaucht worden war, schied an den belichteten Stellen, bei einer bestimmten kathodischen Polarisation, Kupfer aus; es wurden Photographien erhalten, die den Daguerrotypien ähnlich waren.

Fig. 1.

Bei weiterer Forschung habe ich ein besonders starkes Effekt bei gefärbten Kupfer-Kuprojodid-Elektroden gefunden. Polierte Kupfer-Elektroden wurden durch Eintauchen in eine alkoholische Jod-Lösung mit einer glatten Kuprojodid-Schicht bedeckt. Die Elektroden wurden in eine schwache $Pb(NO_3)_2$ Lösung getaucht und kathodisch polarisiert; bei einer Polarisation von etwa 0.3 Volt niedriger als das natürliche Elektroden-Potential ging an belichteten Stellen die Färbung der Elektrode aus einer weisslichen in eine grünliche über. Die Lichtwirkung wird durch das Färben der Elektrode ganz bedeutend verstärkt: z. B. bei einem Färben mit Rhodamin B (durch Eintauchen in eine schwache alkoholische Rhodamin-Lösung) war die Lichtemp-

findlichkeit bei entsprechender Polarisation so weit gestiegen, dass man schon bei einer zwei Minuten dauernden Belichtung ein photographisches Bild erhielt (Fig. 1—ein Röntgendiapositiv projiziert auf die Elektrode). Fig. 2a und 2b stellen zwei Aufnahmen von einem Negativ einer Röntgen-Medaille dar (Exposition 11 Minuten). Fig. 2a ist einem Positiv, Fig. 2b einem Negativ ähnlich, weil die grüne Färbung der belichteten Stellen je nach dem Herstellen des Kupfer-Jodids in einem Falle heller im anderen dunkler als die Grundfärbung (Rhodamin) erhalten wird. Im Original sind die Details

Fig. 2a.

Fig. 2b.

der Aufnahmen gut durchgearbeitet. Getrocknete Photographien erhalten sich lange Zeit auch beim Licht.

Ähnliche Effekte wurden auch beim Färben mit anderen Farbstoffen erhalten.

Für diese eigenartige Prozesse einer kombinierten Wirkung des Lichtes und der elektrochemischen Polarisation wird die Benennung photo-elektrochemische Prozesse vorgeschlagen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht dem Akad. A. G. Goldman für sein der Arbeit ständig entgegengebrachtes Interesse und seine wertvolle Ratschläge meinen tiefsten Dank auszusprechen.

Physikalisches Institut
d. Ukrainischen Akademie d. Wissenschaften
Kiew.

Eingegangen
d. 17. 1. 1936

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

PHYSICS

HEISENBERG'S OSCILLATOR MODEL AND NUCLEAR MOMENTA

By P. PAVINSKIJ

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, 5. I. 1936)

W. Heisenberg has shown (1) that the theory of the packing fractions of nuclei may be considerably improved by using a simplified Hartree method with the eigenfunctions of the spatial harmonic oscillator describing the states of the individual particles. Such a model used in connection with the Lande scheme (2) leads to some definite conclusions as to the mechanical and the magnetic momenta of nuclei with an odd number of protons, which seem to be in agreement with experimental data.

We suppose that the wave functions of the individual particles are expressed in polar coordinates, and consider the l values corresponding to a given energy-level E_n. The energy of the isotropic harmonic three-dimensional oscillator depends only upon the quantum number n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) alone, and it may be easily verified that for a given n only the following values of l are possible:

$$l = n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots,\ 0 \text{ (or } 1). \qquad (1)$$

According to Heisenberg's scheme, the protons and the neutrons belonging to the states with the same n values form a schell in the nucleus, the number of identical particles in a closed shell being equal to

$$\sum^{n} 2(2l+1) = (n+1)(n+2) \qquad (2)$$

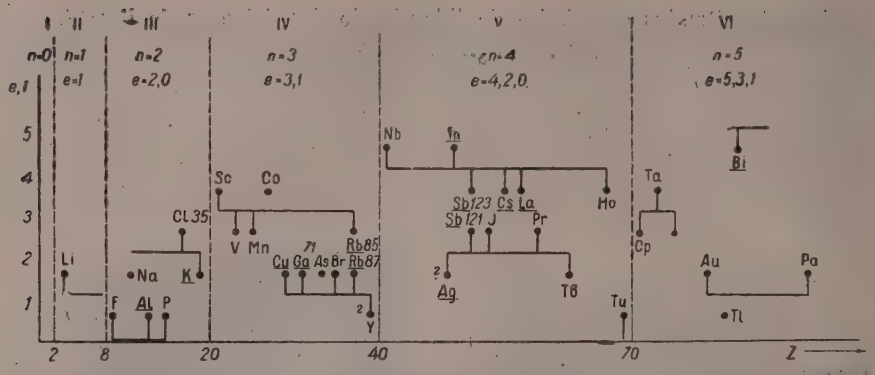
with the sum taken over all possible values of l.

It follows from (2) that if there are no «gaps» in the structure of the protonic, shells, those of the nuclei:

$$\text{He}\,(Z=2),\quad \text{O}\,(Z=8),\quad \text{Ca}\,(Z=20),\quad \text{Zr}\,(Z=40)\quad \text{and}\quad \text{Yb}\,(Z=70),$$

should be closed.

Now let us consider a nucleus containing an odd number of protons. As Landé has shown, we may often predict both the mechanical and the magnetic momentum of such a nucleus by supposing that only the unpaired proton is responsible for them. The l value of the proton may be determined unambiguously by using the formula $I = l \pm \frac{1}{2}$ and the value of the magnetic momentum of the nucleus. If the scheme suggested is valid, the l values obtained



Points indicate experimental I values. Continuous lines join the elements wiht equa l values assumed for the unpaired proton. The underlined elements have their magnetic momenta in accordance with this scheme

should follow the rule (1). The diagram, similar to that given by S. Frisch [3] and the table show that there are in fact few exceptions to the rule among the nuclei satisfying approximately the Landé assumption.

Observed and theoretical $g(I)$ values of nuclei with an odd number of protons

	Z	I	n	l	g (theor.)	g (observ.)	References
Li^7	3	$^3/_2$	1	1	2.0	2.13	[5]
Al	13	$^1/_2$	2	0	4.0	4.2	[6]
K	19	$^3/_2$	2	2	0.4	0.27	[15], [7] (μ=0.4)
Sc	21	$^7/_2$	3	3	1.43	1.1	[8]
Co	27	$^7/_2$	3	3	1.43	0.6—1.0 ?	[13]
Cu	29	$^3/_2$	3	1	2.0	1.7	[8]
Ga^{71}	31	$^3/_2$	3	1	2.0	1.83	[5]
As	33	$^3/_2$	3	?	?	0.6	[6]
Rb^{85}	37	$^5/_2$	3	3	0.57	0.55	[5, 6]
Rb^{87}	37	$^3/_2$	3	1	2.0	1.8	[5, 6]
Y	39	$^1/_2$?	3	1	0	Very small or 0	[9]
Nb	41	$^9/_2$	4	4	1.33	0.83	[14]
Ag	47	$^1/_2$	4	2	0.4	Small	[10]
In	49	$^9/_2$	4	4	1.33	1.2	[5, 6]
Sb^{121}	51	$^5/_2$	4	2	1.6	1.1	[6]
Sb^{123}	51	$^7/_2$	4	4	0.67	0.6	[6]
Cs	55	$^7/_2$	4	4	0.67	0.68—0.86	[5, 11]
La	57	$^7/_2$	4	4	0.67	0.72	[12]
Tu	69	$^1/_2$	4	?	?	Small	[9]
Au	79	$^3/_2$	5	1	2.0	1.21	[5]
Tl	81	$^1/_2$	5	?	?	2.83	[6]
Bi	83	$^9/_2$	5	5	0.73	0.79	[5]

There is a marked periodicity in the sequence of the mechanical momenta of the nuclei in the region $20 < Z < 70$, which does not depend on the validity of the Landé assumption; and the ends of the periods coincide exactly with those predicted by the three-dimensional oscillator model. It is in-

teresting to note that the Gallium isotrope Ga_{31}^{71} should have closed neutronic shells (40 neutrons) and follow the Landé scheme, while Ga_{31}^{69}, being an exception, lacks two neutrons in the outer shell ([4]).

It is probable that in the case of As_{33}^{75} we have also two neutrons taking part in the formation of the mechanical and the magnetic momentum of the nucleus, and this may be the cause of its being an exception to the present scheme.

I wish to express my thanks to Prof. S. Frisch for communicating me his work before it was published.

State Optical Institute,
Leningrad.

Received
5. 1. 1936.

REFERENCES

[1] ZS. f. Phys., **96,** 473 (1935). [2] Phys., Rev., **44,** 1028 (1933). [3] S. Frisch, C. R. Acad. Sci. URSS, v. IV, p. 19 (1935). [4] Tamm u. Altschuler, C. R. Acad. Sci. URSS, I, 458 (1934). [5] E. Fermi u. E. Segré, ZS. f. Phys., **82,** 729 (1933). [6] S. Goudsmit, Phys. Rev., **43,** 636 (1933). [7] M. Fox and I. I. Rabi, Phys. Rev., **48,** 746 (1935). [8] Kopfermann u. Rasmussen, ZS. f. Phys., **92,** 82, (1934). [9] H. Schüler u. Th. Schmidt, Naturwiss., **22,** 838 (1934). [10] H. Hill, Phys. Rev., **48,** 233 (1935). [11] Heydenburg, Phys. Rev., **46,** 802 (1934);—Stranathan and Granath, Ibid., **47,** 801 (1935), [12] O. E. Anderson, Phys. Rev., **46,** 473 (1934)—M. F. Crawford and N. S. Grace, Ibid., **47,** 536 (1935). [13] K. R. More, Phys. Rev., **46,** 470, (1934). [14] S. Ballard, Phys. Rev., **46,** 806 (1934). [15] S. Millman, M. Fox, and I. I. Rabi, Phys. Rev., **46,** 320 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

CHIMIE

SUR LES TRANSFORMATIONS EXOTHERMIQUES DE L'OXYDE D'ALUMINIUM*

Par D. AVDALIAN

(Présenté par I. Grebenščikov, de l'Académie, le 8 XII 1935)

1. Le phénomène du processus exothermique dans les oxydes de métaux a été observé pour la première fois par Berzélius. Plus récemment, Le Chatelier en entreprend l'etude pour les oxydes de Al, Fe, Cr et leur trouve des températures de transformation à 850, 950, 900°. Selon Le Chatelier cette particularité tient aux propriétés amphotères du métal; il avance les thèses suivantes:

Si l'oxyde est obtenu d'un composé où le métal amphotère joue le rôle de base,—en ce cas il donne lieu au processus exothermique; par contre, il n'en est rien pour les oxydes provenant d'un composé où le métal amphotère a le rôle d'acide. Ainsi, par ex., si l'oxyde d'aluminium est obtenu par précipitation, avec de la solution aqueuse d'ammoniaque, de solution de nitrate, de chlorure, etc, un arrêt exothermique doit apparaître dans les courbes d'échauffement, ce qui est observé, en effet; mais, lorsqu'il s'agit de solutions précipitées d'aluminate de sodium, l'arrêt ne doit pas se produire. Ces propositions ont été vérifiées et confirmées par des expériences (Parravano, Houldsworth, Mellor, Kepler, Kurnakov). Toutefois, Tammann et Pape [4] affirment que le processus exothermique dans l'oxyde d'aluminium est une manifestation de propriétés qui sont inhérentes à cet oxyde et ne dépend pas du mode de préparation. Ils en donnent, comme preuve, une courbe d'échauffement d'un oxyde fourni par la maison Kahlbaum. Mais, comme Tammann et Pape n'indiquent pas les conditions d'obtention de l'oxyde, la question restait, en fait, indécise.

2. Pour expliquer le processus exothermique en question deux hypothèses sont en présence, dont l'une, dérivant des travaux de Berthelot [13], suggère que le dégagement de chaleur serait lié soit au passage de la substance donnée de l'état amorphe à l'état cristallin (verre), soit au grossissement du grain d'une matière cristalline finement divisée (or, argent). Bœhm [7, 8] soutient cette thèse en se basant sur des données radiographiques. L'autre hypothèse se rapportant à l'oxyde d'aluminium est mise en avant par Parravano partant des considérations suivantes: à l'obtention d'oxyde de Al par dissociation thermique de $AlCl_3 6H_2O$ après enlèvement complet de HCl, le

* La partie expérimentale du travail a été exécutée à l'Institut de Chimie appliquée en 1932.

réseau cristallin de l'oxyde reste distendu de telle sorte qu'en chauffant au-dessus de 600° on observe une contraction brusque du dit réseau. Ce phénomène a pour résultat un accroissement du poids spécifique, ce qui est brillamment confirmé par des expériences, voir les courbes poids specifique—température: Parravano, Biltz (²), Belyankin et Dilaktorsky (³). Ces derniers auteurs ont déterminé le coefficient de réfraction de l'oxyde de Al comme dépendant de la température de calcination.

Les raisonnements de Bœhm et de Parravano peuvent aussi bien être appliqués à l'oxyde d'aluminium obtenu de $Al_2O_3 3H_2O$. Ici, tout comme dans le cas de la dissociation thermique de $AlCl_3 6H_2O$, après déshydratation complète une déformation du réseau cristallin doit s'observer, puisque dans les deux cas la substance se dégageant est une partie constituante du noyau cristallin. Donc, en adoptant le point de vue de Tammann, il était tout naturel de supposer que l'absence de tout effet exothermique observable tenait à quelque autre circonstance.

3. Une comparaison analogue des propriétés peut être effectuée pour les oxydes obtenus par précipitation à solution aqueuse d'ammoniaque de solutions de nitrate d'aluminium et par dissociation thermique de $Al_2O_3 3H_2O$, et comme dans les deux cas l'Al_2O_3 n'a pas de réseau cristallin à orientation régulière, les propriétés dépendant de ce facteur doivent être analogues. La structure cristalline, l'état énergétique et la grosseur des particules de l'oxyde obtenu par ces deux procédés, à partir du moment même de la formation du dépôt, varient, c.-à-d. qu'il s'opère, au cours du temps, une transformation graduelle du dépôt. L'augmentation de la température ne fait qu'accélérer ce processus (⁶).

4. La déshydratation de la Bœhmite, du diaspore (dernier stade de décomposition de $Al_2O_3 3H_2O$), se produisant à 300—450°, s'accompagne de la formation d'une solution solide qui, à une température plus élevée, s'évapore (¹²). Le processus d'évaporation s'effectue fort lentement; c'est pourquoi, si l'on fait augmenter la température sans attendre l'établissement d'une pression d'équilibre fixe correspondant à la température donnée ou une deshydratation complète, l'évaporation s'effectuera à des températures élevées. De ce fait devient possible, à un certain intervalle de températures, la coïncidence des deux processus suivants: évaporation de la solution solide, processus endothermique, et contraction du réseau cristallin de Al_2O_3, accompagnée de dégagement de chaleur.

Une compensation mutuelle des effets thermiques étant inévitable dans ce cas, il en résulte que les courbes d'échauffement démontreraient la continuité du processus. Pour vérifier cette supposition il était indispensable d'examiner séparément des réactions s'effectuant simultanément, c.-à-d. qu'il fallait procéder à la déshydratation de $Al_2O_3 3H_2O$ à des températures plus basses que celle de la réaction exothermique. De cette manière, toute possibilité de coïncidence des deux réactions se trouve écartée. La déshydratation était pratiquée à 500°C dans un vide de 5 mm de pression pendant 4 heures. Les courbes d'échauffement de l'oxyde ainsi déshydraté obtenu de l'alumniate font voir un arrêt exothermique qui atteste le bien-fondé de la susdite proposition.

5. Pour donner plus d'évidence a la démonstration de l'identité des oxydes fournis par des procédés différents nous avons dressé les courbes d'échauffement de $AlCl_3 6H_2O$ et de $Al_2O_3 3H_2O$ dans les mêmes conditions. Dans tous les trois cas nous avons obtenu des arrêts à 850°. De plus, un autre arrêt à 1060°C, dont Tammann fait mention dans son travail, a lieu sur la courbe d'échauffement de $Al(NO_3)_3$.

Nous voyons donc que l'affirmation de l'identité des oxydes est justifiée par l'expérience.

6. Les courbes d'échauffement ont été dressées avec l'appareil enregistreur de N. Kurnakov, de l'Académie. Le chauffage du four de 100 à 1200° durait trois heures.

Manuscrit reçu
le 8 X 1935.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] N. Parravano e V. Montaro, Atte Accad. dei Lincei, (6) **7**, 885 (1928). [2] W. Biltz, A. Lemke und K. Meisel, ZS. für anorg. Chem., **186**, 373 (1930). [3] D. Belyankin u. N. Dilaktorsky, Centralbl. f. Mineralogie (1932). [4] Tammann u. Pape, ZS. f. anorg. Chem., **127**, 43 (1923). [5] H. Le Chatelier, Bull., **47**, 303 (1887). [6] Hüttig, ZS. f. anorg. Chem., **179**, 49 (1929). [7] Böhm, ZS. f. anorg. Chem., **149**, 217 (1925). [8] Böhm, Koll. ZS., **42**, 276 (1927). [9] Houldsworth, Trans. Ceram. Soc., **23**, 279 (1924). [10] N. Parravano, Atti del III congresso naz. chim pura ed applic. [11] Н. Курнаков и Г. Уразов, Журнал прикладной химии, 1,13. [12] Д. Авдалиан, Исследование процесса термического разложения $Al_2O_3 3H_2O$ (sous presse). [13] Berthelot et Fabre, Ann. ch. phys., **14**, 161 (1888).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

BIOCHEMISTRY

FLAVINS AND METABOLISM. IV

FLAVIN CONTENT IN THE LIVER OF CATTLE DURING DIFFERENT SEASONS

By A. J. CHARIT (CHARITE) and N. V. CHAUSTOV (KHAUSTOV)

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 17. XII. 1935)

The works of various authors ([2], [5], [8], [10]) have amply determined the quantitative distribution of flavins in numerous plant and animal tissues. We append below a table compiled by us from the authors quated above. Their data, however, even for the same tissue of some particular animal, not infrequently show a considerable discrepancy. Thus, for instance, for the liver of cattle we have the following data: 15.9 γ according to Kuhn, Wagner-Jauregg and Kaltschmidt ([8]), 10—20 γ according to Euler and Adler ([5]) and 17—35 γ according to Charit and Chaustov ([1], [2]): the last named authors, however, sometimes found as little as 7 γ per 1 g of liver.

Since figures as high as 17—35 γ were found in the summer months, while figures as low as 7 γ related to autumn, the question arose as to whether the decrease in the flavin content might not be accounted for by the time of the year, or, in other words, by the food taken by the animal during that particular season. That being so, and with a view to elucidating the dependance of the flavin content in animal organs on the season, the fluctuations of the flavin content in the liver were systematically determined for nearly a whole year.

The flavin content in 1 g fresh liver was determined colorimetrically by Charit and Chaustov's method ([1],[2]). It was found that flavin content in 1 g liver is considerably higher in summer than during the winter months. Sometimes this excess amounted to as much as 300%. The curve given below shows the distribution of the flavin content in cattle liver according to the months of the year (see Fig. 1).

It may be seen from the diagram that the highest flavin content was found in the liver of animals killed in August or September, *i. e.* at a time when the cattle had already spent several months at grass. In October the animals still possess a more or less considerable store of flavins. The latter begins to decrease in November and reaches its minimum in March or Arpil. This is probably due to the fact that the animals are stabled and deprived of green fodder or get very little of it, as compared with summer conditions.

Thus, the flavins accumulated in summer are expended in winter. The possibility of this being so has been proved by the last works of R. Kuhn, Kaltschmidt and Wagner-Jaurreg ([9]), who found a direct relation between

Flavin Content in Plant and Animal Tissues according to Warburg and Christian [10]; Kuhn, Wagner-Jauregg, and Kaltschmidt [8]; Euler and Adler [5]; Charit and Chaustov [1, 2].

Tissues tested	Amount in γ per 1 g tissue	Annotations	Authors
Acetic acid bacteria	15	Dry weight	Warburg and Christian
Brewer's yeast	30	» »	»
Baker's yeast	36	» »	»
Lactic acid bacteria	115	» »	»
Butyric acid bacteria	136	» »	»
Bananas	0.075	Peeled dry weight	Kuhn c. al.
Apricots	0.57	» » »	» » »
Tomatoes	0.71	» » »	» » »
Wild rose	0.069	Fresh tissue	» » »
Carrot	0.20	» »	» » »
Spinach	0.57	» »	» » »
»	5.70	Dry weight (calculated)	» » »
Hay meal	7.17	Dried lucerne	» » »
Grass	1.42	Fresh tissue	» » »
Potato	0.075	» »	» » »
Wheat bran	0.033	» »	» » »
Malt extract	2.10	» »	» » »
» »	1.60	» »	» » »
White beer	0.29	Per 1 cm³	» » »
» »	0.060	» » »	» » »
White wine	0.081	» » »	» » »
Fir honey	1.060	» » »	» » »
Whole milk	1.00	» » »	» » »
Sour milk	0.45	» » »	» » »
Yeast	18.0	Dry weight	» » »
Yeast extract	43.2	Per 1 g	» » »
Egg albumen	14.1	Dry weight	» » »
Bull liver	15.9	Fresh tissue	» » »
Rat liver	15.6	» »	» » »
Cod liver	0.53	» »	» » »
Human urine	0.075	Per 1 cm³	» » »
Bull liver	10—20	Fresh tissue	Euler and Adler
Bull kidney	10—20	» »	» » »
Glandulae adrenalis of a bull	5—10	» »	» » »
Corpus luteum	5—10	» »	» » »
Bull brain	1—5	» »	» » »
Ovarium (stroma)	1—5	» »	» » »
Follicle	0.025—0.50	» »	» » »
Bull spleen	0.5—1.0	» »	» » »
Bull lungs	0.5—1.0	» »	» » »
Bull hypophysis:			
anterior lobe	0.5—1.0	» »	» » »
posterior lobe	0.025—0.5	» »	» » »
Human placenta	0.5—1.0	» »	» » »
Bull eye, retina	1—5	» »	» » »
Pigment epithelium	0.5—1	» »	» » »
Sheep eye, retina	1—5	» »	» » »
Eye of rabbit	0.025—0.5	» »	» » »
Eye of hen	1—5	» »	» » »
Eye of fish	10—20	» »	» » »
Bull blood:			
whole blood	0.025	» »	» » »
serum	0.025	» »	» » »

Tissues tested	Amount in γ per 1 g tissue	Annotations	Authors
Roux sarkoma (bird)	0.5—1.0	Fresh tissue	Euler and Adler
Jensen sarkoma (rat)	0.025—0.5	» »	» » »
Liver of rabbit	6.45	» »	Charit and Chaustov
Kidneys of rabbit	13.05	» »	»
Cardiac muscle of rabbit	5.52	» »	»
Lungs of rabbit	8.9	» »	»
Kidneys of cat:			
kidney cortex	25.2	» »	»
kidney medulla	0	» »	»
Kidneys of guinea pig	15.6	» »	»
Liver of guinea pig	20.8	» »	»
» » calf	25.8	» »	»
» » white rat	20.7	» »	»
» » » mouse	16.85	» »	»
» » sheep	5.0	» »	»
» » *Luciopera sandra* . . .	2.6	» »	»

the flavin content in the liver of a rat and the presence of flavins in the food of these animals.

Owing to the researches of P. György (6), Elwehjem and Koehn (4), Chik, Copping and Edgar (3), it is now an established fact that flavin is an indispensable component of vitamin B_2. The investigations of these authors have

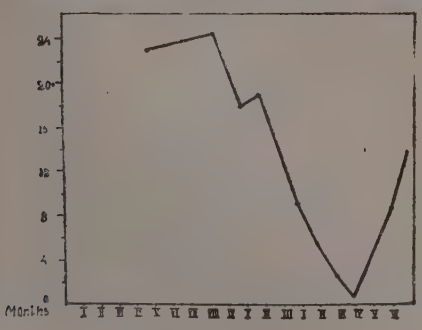


Fig. 1.

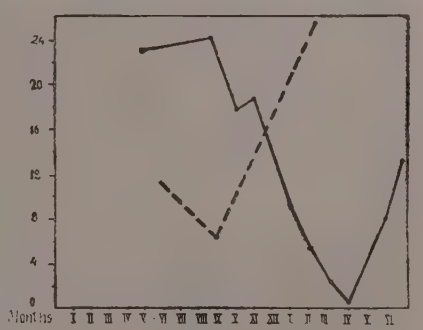


Fig. 2.

shown both flavin and the antipellargic factor (vitamin B_6) to be indispensable to the normal development of animals. Although flavin exerts no antipellargic action, it is indispensable to the animal's normal growth.

A thorough recovery from pellagra and a normal development of the animal are rendered possible only by the presence of both these factors in its food. We, therefore, considered it of interest to compare our data regarding the flavin content in the organism of cattle during different seasons with those showing the liability of man to pellagra during the same period of time (7). The two curves (—— flavin; – – – – – pellagra) are compared in Fig. 2.

A curious fact strikes us in this diagram. The lower the flavin content in the liver of cattle the more numerous the cases of pellagra. This interesting

coincidence justifies us in surmising that the decrease of flavins in the food of man (given a meat diet) is accompanied by a corresponding fall in the content of the antipellargic factor (B_6). On the other hand, it is also permissible to presume that the low flavin content in the winter food of man might render the cure of pellagra more difficult, even in the presence of a sufficient quantity of this antipellargic factor.

Academy of Sciences of USSR,
Institute of Biochemistry
and 2nd Leningrad Medical Institute,
Biochemistry Department.

Received
17. XII. 1935

REFERENCES

[1] Charitu. Chaustov, C. R. Acad. Sci. URSS, v. III. No 5, p. 386 (1934). [2] Charite and Chaustow, Biochem. Journ., **29**, 34 (1935). [3] Chick, Copping and Edgar, Biochem. Journ. (1935). [4] Elwehjem and Koehn, Journ. Biol. Chem., **108**, 709 (1935). [5] H. Euler u. Adler, ZS. physiol. Chem., **223**, 105 (1934). [6] P. György, Biochem. Journ. (1935). [7] Канделаки, Пеллагра (1931). [8] Kuhn, Wagner-Jauregg u. H. Kaltschmidt, Ber. chem. Ges., **67**, 1452 (1934). [9] Kuhn, H. Kaltschmidt u. Wagner-Jauregg, ZS. physiol. Chem., **232**, 36 (1935). [10] Warburg u. Christian, Bioch. ZS., **266**, 377 (1933).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume 1 (X), № 4 (81)

BIOCHIMIE

L'ACTION STIMULATRICE DES «CATABOLITES» SUR LA RÉGÉNÉRATION DES EXTRÉMITÉS CHEZ *TRITON CRISTATUS* ET *AMBLYSTOMA TIGRINUM*

Par M. MICKEVIČ (MITZKEWITSCH)

(Présenté par A. A. Richter, de l'Académie, le 28 XII 1935)

Belehradek (1922—1930) a découvert un fait très intéressant: les têtards de *Rana fusca* nourris de muscles fatigués d'animaux de la même espèce, croissent et se développent bien plus rapidement que ceux nourris de muscles à l'état normal (reposés). Le poids moyen des têtards soumis aux expériences dépassait de 28% celui des têtards témoins. L'analyse de ces résultats amène l'auteur à la conclusion suivante: Pendant la phase catabolique il se forme dans les tissus musculaires des substances (qu'il propose de nommer «c a t a b o l i t e s») qui excitent la phase anabolique de l'échange dans l'organisme. Les catabolites musculaires, qui sont des produits de pésintégration et jouent un grand rôle dans le mécanisme chimique de l'échange, peuvent être désignés, suivant la classification physiologique de Gley, comme des parhormones musculaires.

Des expériences ultérieures de Belehradek ont montré que l'action des parhormones musculaires n'est pas spécifique pour une espèce animale déterminée. Les catabolites de *Bufo vulgaris* exercent une action sur les têtards de *Rana fusca*. L'action des parhormones est donc transmissible d'une espèce à l'autre.

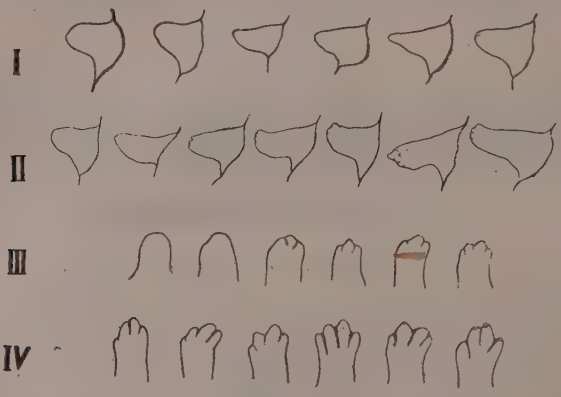
En ce qui concerne la nature chimique des catabolites musculaires, faisons remarquer qu'ils ne s'identifient ni avec l'acide lactique ni avec la créatine et qu'ils résistent à l'ébullition. J'ai effectué des expériences dans le but d'étudier le rôle joué par les catabolites dans les processus de la régénération au point de vue des données de Belehradek.

1. Les expériences sur *Triton cristatus* eurent lieu au printemps et en été de l'année 1934. Je me suis servi de tritons du même âge qui étaient placés dans de l'eau prise à l'aqueduc municipal. Les animaux soumis à l'expérience et ceux destinés au contrôle (témoins) étaient placés dans des conditions semblables. L'examen portait sur la régénération des extrémités. On amputait chez les animaux contrôles et expérimentaux une extrémité au niveau du corps ou bien dans le genou. Le groupe expérimental était nourri de muscles fatigués pris d'un pied de grenouille dont le sciatique avait été excité pendant une heure par un courant électrique. Les animaux de contrôle rece-

vaient la même quantité de muscles frais non fatigués provenant de l'autre pied de la même grenouille. Pour mesurer la vitesse du processus régénérateur la technique mise en œuvre par J. Kabak pour les axolotls en 1931 était adoptée.

Trois séries d'expériences ont fourni les résultats suivants: les catabolites ou parhormones musculaires qui s'accumulent dans les muscles fatigués stimulent considérablement la régénération du triton (Fig.).

Les expériences sur *Amblystoma tigrinum* furent pratiquées au cours de l'automne 1934 en deux séries. On s'est servi d'axolotls agés d'un an environ. La méthode était la même que pour les tritons. Les résultats étaient presque



Régénération de l'extrémité droite des tritons: I—contrôle. II—groupe expérimental (dessin du 12 Mai), III et IV—les mêmes groupes dans 5 jours (le 17 Mai 1934).

les mêmes pour les deux groupes; mais il faut constater que le groupe expérimental manifestait une certaine tendance à accélérer la régénération, sans toutefois que la différence dépassât les limites d'un stade.

Les résultats de mes expériences permettent d'en tirer les conclusions suivantes. Les processus de régénération des extrémités chez le triton peuvent être considérablement stimulés en le nourrissant de muscles de grenouille fatigués. Des expériences toutes pareilles sur les axolotls donnent dans la règle une réponse négative. L'action stimulatrice sur la régénération des tritons dépend probablement de produits de l'échange des matières dans l'organisme—dits «catabolites»,—qui s'accumulent dans les muscles comme résultat d'un travail intense. Quant aux questions sur la nature chimique de ces substances et sur le mécanisme de leur action sur la régénération, ces questions exigent des recherches approfondies à poursuivre.

Institut biologique K. A. Timirjasev,
Moscou.

Manuscrit reçu
le 28 XII 1935.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

GENETIK

DIE KOSMYSCHEN STRAHLEN UND DER MUTATIONSPROZESS

Von HEINRICH FRIESEN

(Vorgelegt von A. A. Sapehin, Mitglied d. Ukrainischen Akademie, d. 1. X. 1935)

Schon mehrere Jahre lang wird in der Genetik die Frage nach der möglichen Bedeutung der kosmischen Strahlen für die Entstehung von Mutationen bei den Organismen erörtert. Nach den Berechnungen von Muller und Mott-Smith (1), Efroimson (2) und N. W. Timofeeff-Ressowsky (3), die von der ionisierenden Kraft der kosmischen Strahlen und von der Tatsache eines direkt proportionalen Verhältnisses zwischen der transmutierenden Wirkung der X-Strahlen und der von ihnen hervorgerufenen Ionisation ausgingen, wurde es jedoch recht wahrscheinlich, dass die kosmischen Strahlen praktisch keine Rolle in der Verursachung des natürlichen Mutationsprozesses spielen (so kann, z. B., nach den Berechnungen Efroimsons bei *Drosophila melanogaster* nur $^1/_{140000}$ der spontan entstehenden Lethalfaktoren der Wirkung der kosmischen Strahlen zugeschrieben werden).

Diese Berechnungen hoben jedoch die Erforderlichkeit direkter Experimente nicht auf. Im Jahre 1933 kam der Verfasser auf den Gedanken, zu solchen Experimenten die Stratostatenflüge zu verwerten. Zufälligerweise gelang es aber nicht, schon mit dem ersten sowjetischen Stratostat «USSR» Drosophila-Fliegen in die Stratosphäre zu befördern. Auf der nach diesem Flug einberufenen Unionskonferenz für Stratosphärenforschung wurden solche Experimente mit Drosophila auf den Vorschlag des Direktors des Instituts für experimentelle Biologie Prof. N. Koltzoff (4) in den allgemeinen Plan der Stratosphärenforschungen aufgenommen [(s. auch H. J. Mullers Rede auf dieser Konferenz (5)]. Die sowjetischen Stratonauten kamen diesem Wunsche gerne nach, und so bin ich heute, nach dem Flug des Stratosphärenballons «USSR-1-bis» vom 26. Juni 1935, in der Lage, über den ersten solchen Versuch mitteilen zu können.

Für das Zustandekommen dieser Arbeit sei hier dem Chef der N-sker Luftschiffahrtabteilung G. A. Prokofiev, dem Ingenieur Ukrainski und ganz besonders den kühnen Stratonauten—dem Kommandeur des Ballons Ch. F. Sille, dem Ingenieur J. G. Priluzki und Prof. A. B. Verigo mein tiefster Dank ausgesprochen. Zu grossem Dank bin ich auch Prof. N. Koltzoff für die ständige Unterstützung, zahlreiche Ratschläge und das der Arbeit entgegengebrachte lebhafte Interesse, Prof. H. Muller für anregende Besprechungen der Arbeit und Dr. W. Sacharov für die durch seine liebenswürdige Mitwirkung am mühevollsten Teil der genetischen Analyse ermöglichte grosse Bereicherung des Materials verpflichtet.

Die Arbeit wurde nach der bekannten *ClB*-Methode an einem im Laufe von fünf Generationen inbreedierten Naltschik-Stamm von *Drosophila melanogaster* durchgeführt. Da der Tag des Fluges nicht genau vorausbestimmt werden konnte, wurden schon am 18. Juni zwei aus je 300 eben ausgeschlüpften Naltschik-Männchen bestehende Fliegenpartien (die eine für den Versuch, die andere für die Kontrolle) fertiggestellt, jede Partie auf zwei gewöhnliche Drosophila-Gläser (mit Futter) verteilt und die Versuchsmännchen schon am nächsten Tage (19. Juni) auf den Flugplatz gebracht. Hier befanden sich beide Gläser bis zum Flug in der Kabine des Stratostats in Verhältnissen, die den Zimmerverhältnissen des genetischen Laboratoriums des Instituts für experimentelle Biologie, wo die beiden Kontrollgläser aufbewahrt wurden, sehr nahe kamen.

Früh morgens am 26. Juni (von 5 Uhr 25 Min. bis 8 Uhr 02 Min.), d. h. am achten Tag nach Ausschlüpfen der Männchen, fand der Stratosphärenflug statt, wobei der Stratostat eine Höhe von 15 900 m erreichte. Die Fliegen befanden sich in der Kabine. Hier herrschte während des Flugs ständig eine Temperatur von +12 bis +14° C.

Morgens am 29. Juni erhielt ich die Versuchsfliegen zurück und noch am gleichen Tag wurden dieselben ebensowie die Kontrollmännchen individuell mit $\frac{ClB}{y\ Hw}$ Weibchen gekreuzt. Tabelle 1 zeigt die Zahl der fertilen und sterilen F_1-Kulturen im Versuch und in der Kontrolle. Wir sehen, dass der Prozentsatz der sterilen Kulturen im Versuch und in der Kontrolle nahezu der gleiche ist.

Tabelle 1

	Anzahl der fertilen F_1-Kulturen	Anzahl der sterilen F_1-Kulturen
Versuch	132	6
Kontrolle	105	5

Um eine grössere Zahl von *ClB*-Weibchen für die Aufstellung von F_2-Kulturen zu erhalten, wurden alle F_1-Kulturen am 2. Juli dubliert, wobei die Männchen sofort, die Weibchen nach zwei Tagen aus diesen neuen Kulturen entfernt wurden.

Insgesamt wurden je 5 500 F_2-Kulturen im Versuch und in der Kontrolle (zusammen 11 000) aufgestellt (die *ClB*-Weibchen wurden individuell mit ihren *y Hw*-Brüdern gekreuzt). Offenbar ist es gewissen Eigenschaften des Futters bzw. Besonderheiten der *y Hw*-Männchen zuzuschreiben, dass nur ca. 50% der F_2-Kulturen fertil waren.

Die Ergebnisse des Versuchs und der Kontrolle nach geschlechtsgebundenen Lethalfaktoren sind in Tabelle 2 dargestellt.

Tabelle 2

	Anzahl der untersuchten Chromosomen	Anzahl der Lethalfactoren	Prozentsatz der Lethalfaktoren
Versuch	2 724	8	0.294 ± 0.104
Kontrolle	2 445	10	0.409 ± 0.129

Die Resultate unseres Experiments lassen die kosmische Strahlung durchaus nicht als Ursache des natürlichen Mutationsprozesses erscheinen. Sehen wir aber einmal nach, in wieweit unser negatives Resultat statistisch gesichert ist.

Prof. A. B. Verigo, der wissenschaftliche Leiter des Flugs, hat mir in liebenswürdiger Weise folgende Daten mitgeteilt:

Auf der Erdoberfläche wird von den kosmischen Strahlen die Bildung von 1.4—1.5 Paar Ionen pro cm^3/ sec. hervorgerufen.

Die Versuchsfliegen aber befanden sich während des Fluges zwei Stunden lang unter Einwirkung einer Strahlung, welche die Bildung von 100—150 Paar Ionen pro cm^3/sec. hervorruft.

Aus diesen Angaben ist leicht zu berechnen, dass die Dosis kosmischer Strahlung, die die Fliegen in den besagten zwei Stunden erhielten, auf der Erdoberfläche erst in 5.554—8.333 Tagen zustandekommen könnte.

Nehmen wir nun an, dass der natürliche Mutationsprozess bei *Drosophila melanogaster* wirklich durch die kosmischen Strahlen verursacht wird (die Gamma-Strahlen irdischen Ursprungs, welche die Bildung einiger Paar Ionen pro cm^3/ sec. hervorrufen, werden von uns nicht in Betracht gezogen, denn für selbige als für Strahlen, deren transmutierende Wirkung experimentell untersucht und der von ihnen hervorgerufenen Ionisation direkt proportional befunden ist, bewahren die am Anfang unseres Aufsatzes erwähnten Berechnungen ihre volle Gültigkeit). Das heisst dann, dass der in unserer Kontrolle beobachtete Prozentsatz von Lethalfaktoren durch die Einwirkung der kosmischen Strahlen im Laufe von 9 Tagen der embryonalen Entwicklung und von 11 oder etwas mehr Tagen des erwachsenen Zustandes der Fliegen hervorgerufen wurde. Ohne einen grossen Fehler zu begehen, können wir annehmen, dass bei der für das Alter, in welchem die Fliegen den Stratosphärenflug mitmachten, charakteristischen Intensität des Mutationsprozesses diese Zeit einer Einwirkung im Laufe von rund 20 Tagen entspricht. In solchem Falle aber müsste der Prozentsatz der Lethalfaktoren im Versuch denjenigen der Kontrolle 1.278—1.417 mal übertreffen (da ja zur 20-tägigen Dosis kosmischer Strahlung im Versuch noch eine Dosis hinzukommt, die auf der Erdoberfläche erst in 5.554—8.333 Tagen zustande kommen könnte).

Von unserer Kontrolle (0.409% Lethalfaktoren) ausgehend, müssten wir im Versuch also $0.523 \pm 0.16\%$ bis $0.580 \pm 0.153\%$ Lethalfaktoren erwarten. Die Differenz zwischen dieser Erwartung und dem im Versuch wirklich erhaltenen Prozentsatz beträgt von $0.523 - 0.294 = 0.229 + 0.179\%$ bis $0.580 - 0.294 = 0.286 \pm 0.185\%$. Die erste Differenz übertrifft ihren mittleren Fehler 1.279 mal, die zweite den ihrigen 1.546 mal.

Somit sprechen die Resultate unseres Experiments mit einer 80—88%-igen Wahrscheinlichkeit gegen die Zurückführung des natürlichen Mutationsprozesses auf die kosmische Strahlung, was die Konsequenzen bekräftigt, die aus den am Anfang des Aufsatzes erwähnten Berechnungen folgen.

Eine winzige Beteiligung der natürlichen Radiation an der Herbeiführung des natürlichen Mutationsprozesses ist von diesem Standpunkte aus, natürlich, nicht ausgeschlossen, doch hat sie keine reelle Bedeutung für die Evolution. Daher haben wohl diejengen Biologen (N. Koltzoff, M. Nawaschin u. a.) recht, welche die Ursachen des natürlichen Mutationsprozesses in innerhalb der Zelle sich abspielenden Lebensprozessen und in auswärtigen thermischen und chemischen Einwirkungen suchen.

Endgültig sicher werden diesen Schluss, wie uns scheint, weitere Versuche mit in der Stratosphäre gewesenen Drosophila-Fliegen machen. Wir

hoffen, dass es recht bald gelingen wird, Fliegen an einem Flug von längerer Dauer teilnehmen zu lassen; die längere Dauer des Aufenthalts (vorausgesetzt, dass die Höhe der vom Stratostat «USSR-1-bis» erreichten ungefähr gleich sein wird) muss gestatten, an einer nicht über die Grenze des Möglichen hinausgehenden Chromosomenzahl die Frage endgültig zu klären.

Institut für experimentelle Biologie.
Moskau.

Eingegangen
d. 1. X. 1935.

ZITIERTE LITERATUR

[1] H. J. Muller a. L. M. Mott-Smith, Proc. Nat. Acad. Sci., **16**, (1930) [2] W. P. Efroimson, Biol. Zbl., **51**, H. 9 (1931). [3] N. W. Timofeeff-Ressowsky, Erg. med. Strahlenf., 5 (1931). [4] Н. К. Кольцов, Труды Всесоюзн. Конфер. по изучению стратосферы (1935). [5] Г. Меллер, Труды Всесоюзн. Конфер. по изучению стратосферы (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

GENETICS

INVESTIGATIONS OF POTATO IN GENETIC ASPECT I.

PROTEIN CONTENT OF CERTAIN SPECIES AND HYBRIDS OF POTATO

By P. A. SCHWARZ and S. F. KUZMIN

(Communicated by A. A. Sapehin, Member of the Ukrainian Academy, 4. XII. 1935)

The great specific differences in the potatoes at our disposal in the Soviet Union, which have been collected by expeditions of the All-Union Institute of Plant Industry, makes it possible not only to develop the breeding of potatoes on a wider scale, but also to use the potato as a means of solving theoretical problems. The presence of wild and primitive forms of potatoes, possessed of characters valuable in an economic sense, such as immunity, frost resistance, drought resistance, high starch and protein content and the like, places before geneticists and plant breeders the urgent task of studying the laws of inheritance of these characters and produktion of new economically valuable forms. In accordance with the dictum of Academician N. I. Vavilov to the effect that «Selection for quality and for chemical composition must be attributed a first-rank importance» (1), we have, in this paper, set ourselves the task of studying the mode of cnheritance by heredity of the protein content in potatoes.

Our work was begun in the White Russian Potato Station together with I. D. Nicheporhcuk, plant breeder. In 1935 the work was transferred to the experimental fields of the Laboratory of Genetics and Plant Breeding of the Biological Institute of the White-Russian Academy of Sciences. The chemical analyses were carried out by the biochemical group of the Chemical Institute of the White-Russian Academy of Sciences. The South American species *S. Phureja* 1654 and *S. Rybinii* 46 served as the initial material for our investigations. These species of potatoes are chracterized as follows by Bukasov(2): «*S. Phureja* Juz. et Buk. Bolivian mountain valley species. Attacked by phytophthora. Not frost resistant, vegetative mass rather highly developed. Tuber formation in the long day—middling. Tubers of medium size. Starch content lowest among all cultivated species, 8.5—10.5 per cent. Considered as early-maturing in local conditions. Berries rarely formed. Chromosomes,—24. It get crossed with wild and with cultivated species». «*S. Rybinii* Juz. et Buk. Columbian mountain species. Systematically remote from *S. Andigenum* and *S. tuberosum*. Vegetative mass less than in *S. Andigenum*. Attacked by phytophthora. Resistant to virus diseases. Not frost resistant. Hydrophyte. Berry formation rare. Tuber formation in the long day fairly good. Tubers small, starch content about 11 per cent, in some tubers up to about 20 per cent. Peculiar in respect of its many rows of flowers. Apparently, has the shortest period of tuber dormancy of all species. It get crossed with many cultivated species (Nesterovich; *Phureja*, *goniacalyx*, *Andigenum*, *tuberosum*). Chromosomes—24».

We chose this pair of parents because of the following considerations. First of all, they differ from each other in protein content, *S. Phureja* having

14.09 per cent and *S. Rybinii* having 5.37 per cent. In a systematical sense, the species are fairly close related. Their hybrids are self-fertile. The number of chromosomes is the same in both parents: $2n=24$. According to both Rybin's and our own data, a conjugation of the chromosomes occurs in the hybrids of *Phureja* and *Rybinii*. All this made it possible to suppose that segragation of characters would not be complicated by chromosomal anomalies. Furthermore, it is known that hybrids of *Phureja* and *Rybinii* are more productive under our conditions than the parent forms. Again, *S. Phureja* is strongly susceptible to the virus diseases, while *S. Rybinii* is virusresistant, which again is in favour of the selection of this pair. *S. Phureja* is an early-maturing species, and the tubers of *S. Rybinii* have no period of dormancy, owing to which there is the possibility of securing several generation in a year.

We juged the quantity of proteins in the hybrids and in the initial forms of the potato by determining the protein nitrogen according to the method of Barnstein-Stutzer, with a corresponding multiplication of the data by the coefficient 6.25. The nitrogen was calculated by the Kjeldahl method. Preliminary killing of the fermentative activity in the raw material was accomplished by placing the sliced potato tuber in the steam of boiling Koch solution for 5—7 minutes. Further drying took place at a temperature of not over 50°. The material was then reduced to powder, sifted, and mixed. Test portions were then taken from it for the determination of the percentage of moisture and protein nitrogen. The data are shown in Tables 1 and 2.

Table 1

Percentage of Protein Content in Certain Species of Potatoes in Relation to Dry Weight

No	Name of species or variety	Protein nitrogen	Proteins
1	*S. Phureja* 8 071/1 654	2.255	14.09
2	*S. Phureja* 8 072/1 655	2.095	13.09
3	*S. Phureja* 8 074/1 713 c-3	1.862	11.63
4	*S. Rybinii* 46	0.86	5.37
5	*S. Antipovizii*	1.421	8.88
6	*S. tuberosum*, «Übel»	0.725	4.53
7	*S. tuberosum*, «Kruger»	0.817	5.10

The figures of the tables represent the absolutely dry weight. The material was fixed in the month of April, after it had lain through the winter in the cellar. Only samples Nos 145, 146/159, 145/160 were fixed in the autumn from the crop of 1935. We investigated the protein content of three forms of *S. Phureja*, numbers 8071/1654, 8074/1713c-3, 8072/1655; *S. Rybinii*, form No 8023/46; *S. tuberosum*, variety «Übel»; nutritive standard *S. tuberosum*, variety «Kruger»; *S. Antipovizii*; hybrids F_1-, F_2- (*S. Phureja* × *S. Rybinii*): F_1- (*Antipovizii* × *Phureja*) and the cross (*Phureja* × *Rybinii*) × *Rybinii*.

Passing now to a discussion of the results obtained from the analysis, we will note certain morphological chaaacterictics of the plants we investigated. F_1- hybrids of *Phureja* × *Rybinii* are relatively uniform. In F_1 the form and colour of the leaves of *S. Phureja* is dominant, although nuances are observed in shade of colour in different forms. The pigmentation of the stem is intermediate and somewhat weak in comparison with *S. Phureja* (the stem of *S. Rybinii* has no pigmentation whatever). The size of the leaf and density of the bush are greater than in the parent forms. It is possible that heterosis takes place here. The corolla is lilac-coloured as in *S. Phu-*

Table 2

Percentage of Protein Content in Potato Hybrids in Relation to Dry Weight*

F_1-hybrids	Hybrid No	141	142	143	144	145	146	147	149	150	153	154	155
S. Phureia × ×*S. Rybinii*	Protein nitrogen	1.438	2.130	1.734	2.101	1.365	2.350	2.520	1.685	1.543	1.899	1.626	1.864
	Proteins	8.98	13.31	10.84	13.15	8.53	14.71	15.68	10.53	9.64	11.87	10.16	11.64
F_2-hybrids	Hybrid No	145/157	145/158	145/159	145/160	145/161	145/162	145/163	—	—	—	—	—
S. Phureja× ×*S. Rybinii***	Protein nitrogen	1.707	1.766	1.211	1.578	1.232	1.560	1.368	—	—	—	—	—
	Proteins	10.67	11.03	7.57	9.91	7.68	9.75	8.55	—	—	—	—	—
Back-crosses	Hybrid No	142/176	142/177	142/178	142/179	147/181	147/182	147/183	147/184	—	—	—	—
(Phureja × *Rybinii)*×*Rybinii***	Protein nitrogen	1.954	1.503	1.915	1.384	2.101	1.148	1.374	1.195	—	—	—	—
	Proteins	12.21	9.39	11.96	8.65	13.15	7.17	8.58	7.46	—	—	—	—
F_1-hybrids	Hybrid No	133	134	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
S. Antipovizii× ×*S. Phureja*	Protein nitrogen	1.407	1.652	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Proteins	8.79	11.32	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

* All data of chemical analyses in Table 2 are average of two parallel tests.

** F_2-hybrids are descendants of F_1 No 145.

*** Nos 142/176, 142/177, 142/178, and 142/179 are descendants of F_1 No 142, while Nos 147/181, 147/182, 147/183, and 147/184 are descendants of F_1 No 147.

reja, which dominates over the white flower of *S. Rybinii*. There is a marked variation in the fertility of the F_1 - hybrids. Along with the self-fertil form No 145, we have plant No 147, which is self-sterile under natural conditions. In F_2-hybrids (*Phureja* × *Rybinii*) there is observed a segregation of morphological characters. There are forms with white flowers. There is a great variation in the size of the flowers, in intensity of coloration of the corolla, form and size of leaves. Plants morphologically quite near to *S. Rybinii* appear, which was not the case in F_1-hybrids. Among 9 F_2-forms. two plants had white flowers. Chemical analysis showed that the percentage of protein varied greatly in the hybrids *Phureja* × *Rybinii*. Even in the first generation, along with forms of low protein content (in No 145, 8.53 per cent), there appeared forms with high protein content (No 147 had 15.68 per cent), which excelled the parent form *S. Phureja* (see Table 2) in this respect.

If we roughly reckon as the extreme forms those which contain 8—9 and 14—15 per cent protein then medium protein content will be 10—13 per cent. Plants with a medium protein content comprise about two thirds of the plants of the first generation that we analysed. These facts indicate that the parent forms were heterozygous. The F_2-hybrids that we investigated were descended from the self-pollination of the self-fertile form No 145 having a low protein content (8.53 per cent). And here also we observe a segregation into forms with high and low protein content, as compared with No 145, but we do not have a transgression beyond the limits of the parent forms. In the back-crosses, hybrid No 142 was taken as the maternal form (protein percentage 13.31) and was crossed with *S. Rybinii*. The descendants of this crossing were plants with numbers 142/175, 142/177, 142/178 and 142/179 (Table 2). The plants numbersd 147/181, 147/182, 147/183, and 147/184 are descendants of back-crossing the hybrid with high-protein content No 147 (containing 15.68 per cent protein) with *S. Rybinii*.

The data set forth above may be generalized in the following way:

1. Protein content in potatoes studied is, in all probability, a dominant character, because on crossing a low-protein species with a high-protein species, there appear in F_1, it forms having a protein content near to that of the highprotein parent form. 2. In F_2 a segregation splitting occurs and forms appear with a lower protein content when compared with F_1. 3. Transgression of the second generation beyond the limits of the parental forms was not observed, possibly from the insufficiency of the number of F_2 plants. 4. The protein content of potatoes is apparently conditioned by several genes, as it is indicated by the range of variation in F_1, F_2 and in back-crosses. 5. Finally, on the basis of the data we have brought forward, it seems to us possible to draw the conclusion that it is necessary to carry on selectional work for the breeding of new varieties of potatoes having a high protein content.

We desire to express our gratitude to Dr Dontcho Kostoff for his guidance and valuable suggestions during the progress of our work.

Laboratory of Genetics and Plant Breeding,
Institute of Biology,
White-Russian Academy of Sciences.

Received
4. XII. 1935.

REFERENCES

[1] Н. И. Вавилов, Социалистическое Растениеводство, №12 (1934). [2] С. М. Букасов, Картофель Южной Америки и его селекционное использование, Изд. ВИР'а (1933). [3] D. Kostoff and I. Axamitnaja, C. R. Acad. Sci. URSS, v. I, No 5, p. 328 (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 4 (81)

EXPERIMENTELLE ZOOLOGIE

DETERMINATION DER EXTREMITÄTEN-LÄNGSACHSE BEI TRANSPLANTATION SPÄTER REGENERATIONSKNOSPEN

Von J. M. URANOWSKY

(Vorgelegt von A. A. Richter, Mitglied der Akademie, d. 23. XI. 1935)

Wie bekannt (vergl. die Arbeiten von J. Schaxel, P. Weiss und B. Milojevič nimmt die Entwicklung der transplantierten Regenerationsknospen einen verschiedenen Verlauf ein, je nachdem die Knospe das kritische Stadium, das den Eintritt der Determination kennzeichnet, bereits überstanden hat. Es ist von J. Schaxel bereits 1921 angegeben worden, dass eine transplantierte frühe Knospe sich ortsgemäss entwickelt während eine ältere, also determinierte Knospe ihre Entwicklung herkunftsgemäss durchmacht.

Später hat sich die einseitige Vorstellung verbürgert, dass ältere Knospen bei Transplantation als unbedingt determiniert sich erweisen. Man spricht von ihrer festen Bestimmung, Selbstbestimmung, einsinnigen Bestimmung. Im Sinne der Präformisten aufgefasst, wird die Entwicklung der Knospe als einfache Entfaltung, als Evolution in dem Sinne wie dieses Wort im 17.und 18. Jahrhundert gebraucht wurde, betrachtet.

Wenn die Behauptungen richtig wären, dass späte Regenerationen absolut determiniert sind und dass ihre Entwicklung auf dem Wege der Selbstdifferenzierung gänzlich unabhängig verläuft, so hätten dadurch die Anschauungen von Weissmann, Roux, Barfurth u. a., die Ontogenese sei auf einer mosaischen ungleichmässigen Verteilung der genetischen Faktoren basiert, eine starke Bekräftigung erhalten.

Der Frage der Determination der Längsachse der Regenerationsknospe ist bereits Milojevič näher getreten. Dieser Verfasser amputierte bei *Triton cristatus* das eine Hinterbein, an dessen Basis, und führte contralateral die Amputation distal aus, worauf er die Regenerationsknospen, die die kritische Periode durchgemacht hatten, dorso-dorsal austauschte. Es entstanden dabei Mehrfachbildungen, das Regenerat war aber von normaler Länge. Es ist jedoch Milojevič nicht aufgefallen, dass diese Tatsachen ein interessantes Problem der Entwicklungsmechanik in sich bergen; auch hat er sich mit der Ausarbeitung des Tatbestandes nicht weiter abgegeben— er beschäftigte sich nur mit homonomen, orthotopen Transplantationen. In noch geringerem Masse beschäftigte diesen Forscher die innere anatomische Analyse der erhaltenen Regenerate. Schliesslich hat er auch sogar die von ihm ermittelten Tatsachen in seinen Schlüssen nicht bewertet. Milojevič befolgt das allgemein übliche formell-logische Schema.

entweder Selbstdifferenzierung oder abhängige Entwicklung; er behauptet, obwohl die Tatsachen dagegen sprechen, dass die junge Knospe ein abhängig differenziertes System darstellt und sich ortsgemäss entwickelt, während die ältere Knospe, die die kritische Periode durchgemacht hat, ein selbstdifferenzierendes System vorstellt und sich herkunfstgemäss entwickelt. Es lässt sich aber aus meinen Untersuchungen ersehen, dass diese Auffassung eine irrtümliche ist.

Ich habe an schwarzen und weissen Axolotln (*Siredon pisciformis*) der Generation 1934 auf dem Wege der orthotopen, auto- und homoplastischen Transplantation experimentiert. Ich benutzte die Regenerationsknospen nach Amputation (distal) des Ober- und Unterarmes, des Ober- und Unterschenkels. Ich verpflanzte die Knospe: a) vom Oberarm auf den Ober- resp. Unterschenkel, b) vom Unterarm auf den Ober- resp. Unterschenkel, c) vom Oberschenkel auf den Ober- resp. Unterarm und d) vom Unterschenkel auf den Ober- resp. Unterarm.

Dann wurden auch Transplantationen von schwarzen auf weisse Axolotl ausgeführt, wobei die Transplantation der Regenerationsknospe auf Ober- resp. auf Unterschenkel erfolgte. Es lagen im ganzen 10 Kombinationen vor; für jede derselben wurden 3 Axolotl operiert; ich verfügte also im ganzen über 30 Versuchstiere. B. Milojevič meint, dass die kritische Periode für die Determination auf den 10—12 Tag p. o. fällt; laut J. Schaxel soll bei Tieren von 150—200 mm Körperlänge bei 16° R der Abschluss der Determination ungefähr 30 Tage nach Amputation eintreten. Dies bewog mich, da mich die Gesetzlichkeit der Regeneration später Regenerationsknospen interessierte, die Transplantation mit 24—30 Tage alten Knospen vorzunehmen.

Die Transplantation wurde so ausgeführt, dass ich die Knospe samt ihrer Unterlage in die Krause, die durch Verkürzung des Knochens nach der Amputation entstanden war, einpflanzte. Die Anheilung fiel günstig aus, was dadurch erzielt wurde, dass die operierten Tiere einige Minuten lang an der Luft gehalten wurden, infolgedessen das Implantat eine leichte Antrocknung erfuhr. Die Tiere wurden bei einer Temperatur von 14—16° R gehalten. In der ersten Zeit wurde das Wasser jeden vierten Tag gewechselt (absaugen mit Gummischlauch). Die Transplantation des Hinterbeines auf das Vorderbein war mit Schwierigkeiten verbunden, da der Durchmesser des Transplantats den Durchmesser der Grundlage, auf die das Transplantat verpflanzt wurde, übertraf. Wie bekannt, tritt, wenn die Oberflächen nicht genau übereinstimmen, sogar bei Anheilung, ein hohes Prozent Mehrfachbildungen auf. Im allgemeinen findet bei sorgfältiger Behandlung ein Abfallen der Transplantate höchstens in 20% Fällen statt. In den ersten 2—3 Wochen stellt sich Involution das Implantats ein, das Transplantat wird bedeutendermassen reduciert und sieht wie ein weisses Komma aus; dann erst nach dem Zustande der zeitlichen Depression tritt Regeneration ein. Um diese Zeit erreicht das Kontrollregenerat das Stadium der späten Regenerationsknospe. Das Abpräparieren des Knochensystems erfolgte in der Weise, dass das amputierte Extremitäten-Regenerat in 15% Alkohol auf 24 Stunden in das Thermostat gebracht wurde—die weichen Gewebe liessen sich dann leicht entfernen.

Ich gebe weiter unten endgültige Befunde für Serie «C» und die vorläufige Befunde für die übrigen Serien an.

Die Serie «C» besteht aus den Tieren ЯУ1, ЯУ2 und ЯУ3, bei denen am 7.X.1934 der Oberschenkel distal amputiert wurde und am 11.XI.1934, also einen Monat und 4 Tage später, die späte Regenerationsknospe auf den

distal operierten Oberarm verpflanzt wurde. In diese Serie gehören auch noch die Tiere ЯУ4 und ЯУ5, bei denen am 7.X.1934 der Oberarm distal amputiert wurde und am 11.XI.1934 die entstandene Regenerationsknospe auf einen distal amputierten Unterarm Transplantiert wurde (das Tier ЯУ6

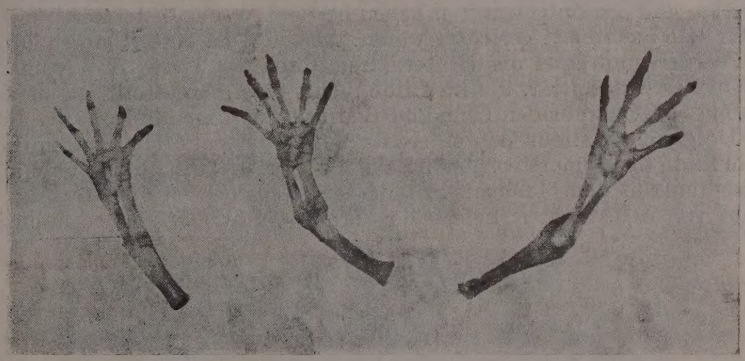


Abb. 1. Links: die regenerierte Hinterextremität, woraus das Transplantat entnommen ist; in der Mitte: die Vorderextremität, die aus dem Transplantat regeneriert ist; rechts: die nicht operierte Vorderextremität. $1^1/_2$ mal vergrössert.

hat beim Wechseln des Wassers sein Transplantat abgeworfen). ЯУ1, ЯУ2 und ЯУ3, nach einer partiellen Reduction und Involution des Transplantats besassen am 26.XII ein volkommen entwickeltes Zeugo- und Autopodium mit 5 Zehen. Die aus dem Transplantat entstandene Gliedmasse hatte ein Knie statt eines Ellbogengelenkes. In ihrer Bewegungsart, wie auch in ihrem Äusseren ähnelt sie einer hinteren Extremität.

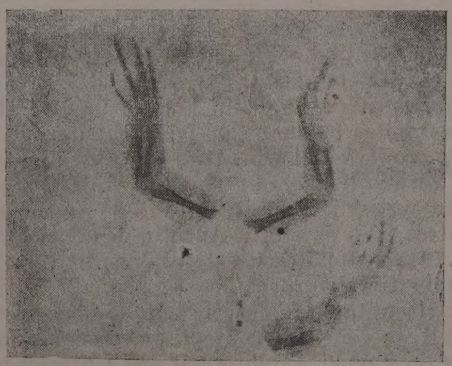


Abb. 2. Links oben: die nicht operierte Vorderextremität; rechts: Vorderextremität mit regeneriertem Transplantat; unten: regenerierte Hinterextremität, woraus das Transplantat entnommen ist.

Abbild 1 ist ein Lichtbild des Knochensystems der zwei Vorder- und eines der Hinterbeine von ЯУ3. Hier ist folgendes hervorzuheben: 1) in der Extremität, die aus dem Transplantat regeneriert ist, sind die beiden Knochen des Zeugopodiums kurz und dick, sie erinnern viel eher an eine Tibia

und Fibula als an eine Ulna und Radius, 2) das Stylo-Zeugopodium-Gelenk sieht viel mehr einem Knie als einem Ellbogengelenk ähnlich.

Die Tiere ЯУ4 und ЯУ5 besassen am 26.XII nach partieller Rebustion und Involution endgültig gestaltete Extremitäten. ЯУ4 besass ein Autopodium mit 5 Zehen. ЯУ5 wies eine Mehrfachbildung auf, die aus 5 normalgelagerten und 3 supplementären Zehen bestand, wobei die letzteren mit ihrer Plantarseite nach oben gerichtet waren. Abbild 2 ist eine Röntgenaufnahme der 2 Vorder- und einer der Hinterextremitäten des Tieres ЯУ4 vom 25.VI. 1935. In der Extremität, die im Bilde rechts oben dargestellt ist, markieren die dunkel hervortretenden Ulna und Radius das proximale Ende des Regenerats. Desgleichen sticht in der rechts unten dargestellten Extremität das dunkle Ende des Femurs von den frisch kalzinierten Tibia und Fibula ab. Das Autopodium aus dem Transplantat des Hinterbeines ist fünfstrahlig. Nach Verlauf von $8^1/_2$ Monaten lieferte das Transplantat nur die der amputierten

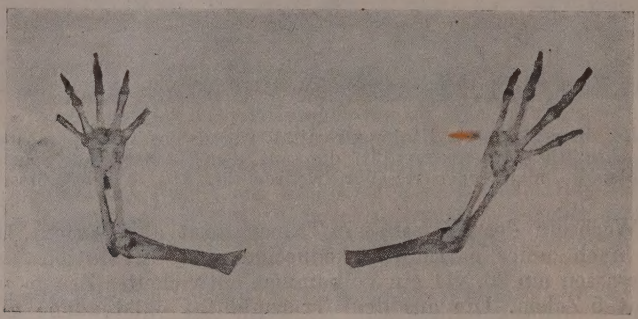


Abb. 3. Links: Vorderextremität, die aus dem Transplantat regeneriert ist; rechts: nicht operierte Vorderextremität $1^1/_2$ mal vergrössert.

Extremität fehlenden unteren Abschnitte von Ulna und Radius, dann ein System kleinerer Knochen und 5 Phalangen. Hätte die späte Regenerationsknospe eine absolut determinierte, durch Selbstdifferenzierung, sich entfaltende Anlage besessen, so wäre die Fortzetzung der Ulna und Radius, als distale Fortsetzung des Femurs von Tibia-Fibula und einem Hinterbein Autopodium gefolgt, aufgetreten sein. Dies war aber nicht der Fall.

Ein ähnliches Verhältnis kommt auch in Abbild 3 zum Vorschein, die ein am 25.VI.1935 ausgeführtes Lichtbild des Knochensystems der zwei Vorderbeine des Tieres ЯУ4 darstellt. Auch in den drei Fällen der Serie «A», in denen am 11.V.1935 späte Regenerationsknospen vom Unterschenkel auf den Oberarm transplantiert wurden, liess sich am 21.X.1935 eine doppelte Verlängerung der Extremitäten-Längsachse nicht nachweisen. In einem Falle nur—nämlich bei 4Д, in dem eine späte Regenerationsknospe am 11.V.1935 vom Oberarm eines schwarzen Axolotls auf den Unterschenkel eines weissen Axolotls transplantiert wurde, war am 21.X.1935 folgendes zu notieren: Verlängerung der Längsachse des dunklen pigmentierten, einem Vorderbein ähnlichen Zeugopodiums, das aus dem Transplantat regeneriert war; es hat sich aber ein supplementäres freibewegliches Ellbogengelenke nicht nachweisen lassen. Also ist in keinem der untersuchten Fälle an ausgewachsenen Axolotln eine Doppelverlängerung der Achse des Regenerats erhalten worden. Demanch stellt das Transplantat nicht ein volkommen autonomes System vor, in dem herkunfstgemäss das durch Selbstdifferenzierung sich entwickelnde

Organ in absoluter Weise determiniert ist. Wir sehen, dass, um den bildlichen Ausdruck P. Weiss zu gebrauchen, die späte Regenerationsknospe die Kulissen für die Szenerie in der der Regenerationsvorgang sich abspielt nicht zu liefern vermag. Es soll hier nicht von «entweder Selbstdifferenzierung oder abhängige Differenzierung», entweder «Präformation oder Epigenese» (eine Fragestellung die manche Biologen befürworten) die Rede sein. Die Regeneration des Transplantats stellt in Wirklichkeit eine Erscheinung der Wechselwirkungen, der Wechselbeziehung (im Sinne der Organisation und Induktion) zwischen dem Transplantat und dem Gesamtorganismus vor, wobei dem Transplantat, wenn es das kritische Stadium der Determination, im Sinne der Bestimmung des Regenerats, bereits überstanden hat, die überwiegende Rolle zukommt. Der Einfluss, den der Organismus im ganzen auf den Regenerationsvorgang und unter anderen auf die Determination der Längsachse des Regenerats ausübt, darf nicht unbeachtet bleiben. Es kommt nun darauf an eine Erklärung für diese Tatsache der Wechselwirkung zwischen Organismus und Transplantat zu finden, deren physiologische und genetische Basis, deren materielle Bedingungen und Ursachen zu ermitteln.

Zum Schluss bitte ich Prof. J. Schaxel, für seine wertvollen Hinweise, deren ich im Laufe meiner Arbeit mich erfreute, meinen Dank in Empfang zu nehmen.

Laboratorium f. experimentelle Zoologie
und Morphologie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

Eingegangen
d. 23. XI. 1935.

ZITIERTE LITERATUR

[1] P. Veiss, Roux, Archiv f. Entwicklungsmech. d. Organismen, **111** (1927). [2] В. И. Лодыженская, C. R. Acad. Sci URSS, No 6 (1928). [3] B. D. Milojevič, Archiv f. mikroskopische Anatomie u. Entwicklungsmechanik, **103** (1924). [4] B. D. Milojevič et N. Grbic, C. R. des Séances de la Société de Biologie, XCV, No 29 (1926). [5] J. Schaxel, Untersuchungen ü. die Formbildung der Tiere. Berlin (1921). [6] J. Schaxel, Zool. Anz. **78** (1928). [7] Ю. Ю. Шаксель, C. R. Acad. Sci. URSS, v. IV, No 3 (1934). [8] Ю. Ю. Шаксель, C. R. Acad. Sci. URSS, v. IV. No 4 (1934).